详细解答

STEP I 2017，第 10 题

力学 · 连锁碰撞

STEP I 2017，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s1-q10

关键思路

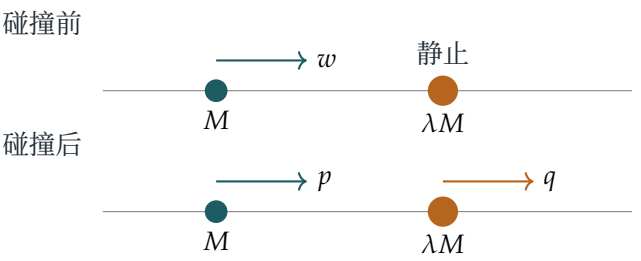
链中每一次碰撞的情况都一样：一粒质量为 M、以速率 w 运动的质点，撞向一粒质量为 λM 的静止质点。因此我们只需以比值 λ 表示，把这一次碰撞解一遍，整条碰撞链便可以重复套用这个结果得出，并得到等比数列（geometric sequence）。之后每一部分的关键，就是比较各质点碰撞后的速度，看看有没有质点追上前面的质点。

解答

把所有质点视为沿 x 轴运动的点，速度以 x 正方向为正。

一次典型的碰撞

质量为 M、以速率 w 运动的质点 A，撞向质量为 λM 的静止质点 B。设碰撞后两者的速度分别为 p 和 q。



由动量守恒（conservation of momentum）及牛顿（Newton）碰撞实验定律（Newton's

experimental law），得

$$Mw = Mp + \lambda Mq, \qquad q - p = ew.$$

把 $p = q - ew$ 代入第一条方程，得 $w = q - ew + \lambda q$，因此

$$q = \frac{1+e}{1+\lambda}\, w, \qquad p = q - ew = \frac{1-\lambda e}{1+\lambda}\, w.$$

记 $r = \dfrac{1+e}{1+\lambda}$ 及 $s = \dfrac{1-\lambda e}{1+\lambda}$。留意

$$q - p = ew > 0,$$

所以每次这样的碰撞刚完结时，两粒质点都会分开。

第 (i) 部分

第一次碰撞是 P（质量 m，速率 u）撞向 P_1（质量 λm）。取 $w = u$ 及 $M = m$，得

$$u_1 = \frac{1+e}{1+\lambda}\, u,$$

即所求结果，而 P 碰撞后的速度为 su。

接着 P_1 向前运动，撞向质量为 $\lambda^2 m = \lambda \cdot (\lambda m)$ 的 P_2。质量比同样是 λ，所以这是同一类碰撞，只是 $w = u_1$。一般而言，P_n（质量 $\lambda^n m$）以速率 u_n 撞向 P_{n+1}（质量 $\lambda^{n+1} m$），所以 $u_{n+1} = ru_n$，而 P_n 碰撞后的速度为 su_n。因此

$$u_n = \left(\frac{1+e}{1+\lambda}\right)^n u.$$

这里 P_n 的第一次碰撞是被 P_{n-1} 撞击，第二次则是它撞向 P_{n+1}。（第一次碰撞刚完结时，P_n 正远离 P_{n-1}，所以接下来它会遇上的事，就是到达 P_{n+1}，前提是后面没有质点先追上它。这正是题目所设想的事件次序，而在第 (ii)–(iv) 部分中，我们会验证情况确实如此。）所以

$$v_n = su_n = \frac{(1-\lambda e)(1+e)^n}{(1+\lambda)^{n+1}}\, u,$$

这是以 x 正方向为正的速度。作为速率，它是上式的绝对值；只有当 $\lambda e > 1$，即 P_n 反弹时，这一点才有影响。

第 (ii) 部分

设 $e > \lambda$。那么 $\lambda < e < 1$，所以 $\lambda e < 1$ 及 $s > 0$；此外 $r > 1$。

碰撞依次发生：先是 P 与 P_1，然后 P_1 与 P_2，再然后 P_2 与 P_3，如此类推。当 P_n 撞向 P_{n+1} 之后，由队尾起计，$P, P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots$ 的速度为

$$su,\ su_1,\ su_2,\ \ldots,\ su_n,\ u_{n+1},\ 0,\ 0,\ \ldots$$

由于 $u_k = r^k u$，其中 $r > 1$ 及 $s > 0$,

$$0 < su < su_1 < su_2 < \cdots < su_n,$$

而且 $u_{n+1} > su_n$，因为 $u_{n+1} - su_n = (r-s)u_n = eu_n > 0$。所以在 $P, P_1, \ldots, P_{n+1}$ 之中，每粒质点都严格地比后面那粒快，任何两粒都不可能再相遇。唯一尚未发生的碰撞，是 P_{n+1} 到达静止的 P_{n+2}；之后把 n 换成 $n+1$，同样的论证便再次适用。

所以每粒 P_n（$n \geq 1$）先被 P_{n-1} 撞击一次，然后撞向 P_{n+1} 一次，此后再不参与任何碰撞：每粒恰好经历两次碰撞。（这也证实了第 (i) 部分所假设的事件次序。）

第 (iii) 部分

若 $e = \lambda$，则 $r = 1$ 及 $s = \dfrac{1-e^2}{1+e} = 1 - e$。所以

$$u_n = u \quad \text{且} \quad v_n = (1-e)u \text{ 对每个} n,$$

而 P 碰撞后的速度也是 $(1-e)u$。整个运动就像一个沿直线传播的脉冲（pulse）：最前面的质点总是以速率 u 运动，撞上下一粒质点时，把速率 u 传下去，自己则降至 $(1-e)u$。后面所有质点都以 $(1-e)u$ 一起运动，所以它们之间不会再有碰撞，而前面以速率 u 运动的质点则离它们愈来愈远。每粒 P_n 恰好经历两次碰撞。

经过 N 次碰撞后，$P, P_1, \ldots, P_{N-1}$ 以 $(1-e)u$ 运动，而 P_N（质量 $\lambda^N m = e^N m$）则以 u 运动。动能（kinetic energy）为

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}m(1-e)^2u^2(1+e+\cdots+e^{N-1}) + \tfrac{1}{2}e^N mu^2 &= \tfrac{1}{2}mu^2\left[(1-e)^2\,\frac{1-e^N}{1-e} + e^N\right] \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2[(1-e)(1-e^N) + e^N] \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2[1-e+e^{N+1}].\end{aligned}$$

除以初始能量 $\frac{1}{2}mu^2$，经过 N 次碰撞后损失的比例为

$$1 - (1 - e + e^{N+1}) = e(1-e^N) \to e \quad \text{当} N \to \infty,$$

因为 $0 < e < 1$。这就是所求结果。

第 (iv) 部分

若 $\lambda e = 1$，则 $s = 0$ 且

$$r = \frac{1+e}{1+1/e} = \frac{e(1+e)}{e+1} = e.$$

所以每次碰撞都令运动中的质点完全停下：P 停下，然后 P_1 以 eu 向前运动，撞向 P_2 后停下，如此类推，其中 $u_n = e^n u$ 及 $v_n = 0$。每粒 P_n 恰好经历两次碰撞，最终各质点都静止，而且每粒都紧贴下一粒，同时只有单独一粒质点把运动带向前，而且愈来愈慢。由于 P_n 需要时间 $1/(e^n u)$ 才到达 P_{n+1}，相邻两次碰撞之间的时间间隔会无限增大。

想一想 动量守恒，那么能量又怎会流失?

经过 N 次碰撞后，只有 P_N 在运动，其质量为 $\lambda^N m = e^{-N}m$，速率为 $e^N u$。它的动量是 $e^{-N}m \cdot e^N u = mu$，理应如此；但它的动能是

$$\tfrac{1}{2}\, e^{-N} m\, (e^N u)^2 = e^N \cdot \tfrac{1}{2} m u^2.$$

动量由愈来愈重、愈来愈慢的质点承载；在动量 p 固定时，动能 $p^2/(2M)$ 会随质量 M 增大而趋于零。剩余的比例 e^N 趋于 0，所以最终初始动能会全部损失。

验算

- 取 $e = 1$ 及 $\lambda = 1$（质量相等、完全弹性），得 $u_1 = u$ 且 P 停下：这正是大家熟悉的牛顿摆（Newton's cradle）交换速度现象。
- 在第 (iii) 部分中，单次碰撞（$N = 1$）损失的比例为 $e(1-e)$。直接计算：P 最终以 $(1-e)u$ 运动，而质量为 em 的 P_1 则以 u 运动，所以剩余能量是原来的 $(1-e)^2 + e = 1 - e + e^2$，两者吻合。
- 以精确分数逐步进行碰撞的电脑模拟，证实了 u_n 和 v_n 的公式、$e > \lambda$ 时每粒质点各经历两次碰撞的规律、损失比例 $e(1-e^N)$（当 $e = \frac{1}{2}$，经过 25 次碰撞后为 0.49999998），以及 $\lambda e = 1$ 时的剩余比例 e^N。

常见错误

- 把牛顿定律写成 $q - p = -ew$，或把次序倒转：分离速率等于接近速率的 e 倍，而这里两者都是正数。
- 忘记每一次碰撞的质量比都是 λ，而正是这一点令答案成为等比数列。
- 未经验证便假设事件的次序。当 $e < \lambda$ 且 $\lambda e < 1$ 时，落在后面的质点可能在前面那粒到达下一粒质点之前就追上它，简单的规律便不再成立。

STEP 之外

第 (iv) 部分显示动量和能量的表现截然不同：动量完全守恒，但能量却因为由愈来愈重的质点承载而完全流失。互相碰撞的质点链，是脉冲在密度变化的介质中传播的一个简单模型，并可引伸至离散晶格（discrete lattice）中的波动传播。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）就以同样严谨的态度讨论碰撞及质心参考系（centre-of-mass frame）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。