详细解答

STEP I 2017，第 1 题

纯数学 · 代换积分法

STEP I 2017，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s1-q1

关键思路

只要把三角函数的分式化简，这几个被积函数（integrand）其实都暗藏 $f'(x)/f(x)$ 的形式（最后一题则是 $f'(x)/f(x)^2$）。$x\sin x+\cos x$ 的导数（derivative）特别简洁，因为两个 $\sin x$ 项互相抵消，而其余的代换（substitution）都建基于同样的抵消。所以策略是：把每个被积函数改写成以 sin 和 cos（或 sec 和 tan）表示，找出导数与分子（numerator）吻合的分母（denominator），然后代换。

解答

第 (i) 部分

设 $u=x\sin x+\cos x$，由乘积法则（product rule）得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x.$$

接着把被积函数的分子和分母同乘以 $\cos x$：

$$\frac{x}{x\tan x+1}=\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}.$$

分子恰好是 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$，所以 $x\cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$，从而

$$\int\frac{x}{x\tan x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\ln|u|+C=\ln|x\sin x+\cos x|+C.$$

第二个积分的做法相同，只是以 $\sin x$ 代替 $\cos x$。把分子和分母同乘以 $\sin x$，

$$\frac{x}{x\cot x-1}=\frac{x\sin x}{x\cos x-\sin x}.$$

设 $v = x\cos x - \sin x$，则

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x,$$

所以分子是 $-\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，从而

$$\int \frac{x}{x\cot x - 1}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v = -\ln|x\cos x - \sin x| + C.$$

不要漏掉负号：它来自对 $\cos x$ 求导。

第 (ii) 部分

第一个被积函数的分母已经值得一试。设 $w = x\sec^2 x - \tan x$。利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^2 x = 2\sec^2 x\tan x$，

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \sec^2 x + 2x\sec^2 x\tan x - \sec^2 x = 2x\sec^2 x\tan x.$$

多余的项再一次互相抵消，而分子是 $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$。因此

$$\int \frac{x\sec^2 x\,\tan x}{x\sec^2 x - \tan x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w = \tfrac{1}{2}\ln|x\sec^2 x - \tan x| + C.$$

想一想 最后一个积分里没有 sec 或 tan。它怎样才能与 $w = x\sec^2 x - \tan x$ 拉上关系?

从分母的括号中提取因子 $\cos^2 x$：

$$x - \sin x\cos x = \cos^2 x\left(x\sec^2 x - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \cos^2 x\,(x\sec^2 x - \tan x) = w\cos^2 x.$$

所以 $(x - \sin x\cos x)^2 = w^2\cos^4 x$，而

$$\frac{x\sin x\cos x}{(x - \sin x\cos x)^2} = \frac{x\sin x\cos x}{w^2\cos^4 x} = \frac{x\sec^2 x\tan x}{w^2},$$

因为 $\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^4 x} = \dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$。分子同样是 $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$，所以用同一个代换，

$$\begin{aligned}\int \frac{x\sin x\cos x}{(x - \sin x\cos x)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{w^2}\,\mathrm{d}w = -\frac{1}{2w} + C\\ &= -\frac{1}{2(x\sec^2 x - \tan x)} + C = -\frac{\cos^2 x}{2(x - \sin x\cos x)} + C,\end{aligned}$$

其中最后一步是把分子和分母同乘以 $\cos^2 x$。如果你喜欢用倍角（double angles），答案可写成 $-\dfrac{\cos^2 x}{2x - \sin 2x} + C$。

验算

- 把每个答案求导，确认能得回被积函数。对最后一题，用商法则（quotient rule）处理 $-\cos^2 x/\big(2(x-\sin x\cos x)\big)$ 时要用到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-\sin x\cos x)=1-\cos 2x=2\sin^2 x$，而各个 $\sin^2 x\cos^2 x$ 项会整齐地合并。
- 数值计算：在 $[0.3, 1.2]$ 上，第一个积分的值是 $0.34953\ldots$，而 $\ln|x\sin x+\cos x|$ 的改变量相同；最后一个积分在同一区间上的值是 $25.7364\ldots$，与 $-\cos^2 x/\big(2(x-\sin x\cos x)\big)$ 吻合。四个答案都已用电脑这样核实过。

常见错误

- 未先消去 $\tan x$ 或 $\cot x$ 就代换：只有在整式乘以 $\cos x$ 或 $\sin x$ 之后，分子才会与 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 吻合。
- 漏掉第 (i) 部分第二个积分中的负号，或第 (ii) 部分中的因子 $\frac{1}{2}$。
- 在最后一个积分中出于习惯就用对数：$1/w^2$ 的积分是 $-1/w$。

STEP 之外

这里的技巧是逆向设计：选取代换，使分母的导数在抵消之后恰好等于分子。背后的道理是 $\int f'/f=\ln|f|$，即对数导数（logarithmic derivative）；它在复分析（complex analysis）中再次出现（用来数函数的零点），在微分方程（differential equations）中则以积分因子（integrating factor）的形式出现。不少 STEP 积分题都是先对一个精心挑选的函数求导，再把答案藏起来而设计出来的；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶题》）有大量练习，助你学会识破它们。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。