详细解答

STEP III 2016，第 9 题

力学 · 弹簧与简谐运动

> **STEP III 2016，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q9

关键思路

把原点放在三角形的中心，并利用对称性（symmetry）。平衡位置（equilibrium position）就是中心，在那里三条相等的张力（tension）互相抵消。当质点沿着直线向 P 移动时，弹簧 QX 和 RX 始终互为镜像，因此它们的侧向拉力互相抵消，运动保持在该直线上。求 RX 需要用到余弦定律（cosine rule）。至于周期，我们先写出准确的恢复力（restoring force），然后只保留对小位移为线性的项。

解答

我们把 X 视为光滑桌面上的质点，把弹簧视为遵守虎克定律（Hooke's law）的轻弹簧，因此长度为 r 的弹簧的张力为 $\frac{\lambda}{l}(r-l)$。

平衡

设 O 为三角形的中心。每个顶点与 O 的距离为

$$c = \frac{2}{3} \times (\text{高}) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\, a = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

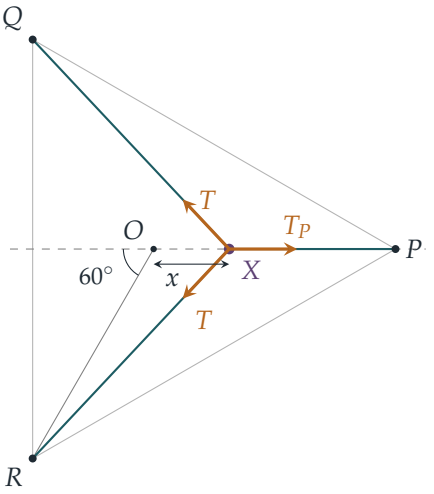
而直线 OP、OQ、OR 两两之间的夹角为 120°。当 X 在 O 时，每条弹簧的长度都是 c，所以三条张力相等。三个大小相等、两两夹角为 120° 的力的合力为零，所以 O 是一个平衡位置。我们使用的正是这个平衡位置。由于 $l < \frac{2}{\sqrt{3}}a$，每条弹簧都被拉伸，伸长量（extension）为

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\, a - l,$$

得证。

RX 中的张力

取 x 轴沿 OP，以 P 的方向为正方向。设 X 在由 O 向 P 方向位移 x 之处。那么 $OX = x$、$OR = c$，而 $\angle XOR = 180° - 60° = 120°$。



在三角形 XOR 中应用余弦定律，

$$RX^2 = c^2 + x^2 - 2cx\cos 120° = c^2 + cx + x^2 = \frac{4a^2}{3} + \frac{2ax}{\sqrt{3}} + x^2.$$

因此由虎克定律，RX 中的张力为

$$T = \frac{\lambda}{l}\left(\sqrt{\frac{4a^2}{3} + \frac{2ax}{\sqrt{3}} + x^2} - l\right),$$

得证。由关于轴 OP 的对称性，$QX = RX$，所以 QX 的张力同样是 T。

运动方程

记 $r = RX$。弹簧 PX 的长度为 $c - x$，所以它的张力为 $T_P = \frac{\lambda}{l}(c - x - l)$，方向指向 P（即 $+x$ 方向）。

点 R 的 x 坐标为 $-c\cos 60° = -\frac{c}{2}$，所以由 X 到 R 的位移的 x 分量为 $-\left(x + \frac{c}{2}\right)$。因此沿 XR 的力 T 的 x 分量为 $-T\,\frac{x + c/2}{r}$。来自 QX 的力有相同的 x 分量，而两个垂直分量由对称性互相抵消。所以没有横越直线 OP 的力，X 沿该直线运动。

? **想一想** 怎样从这个平方根得出一条线性方程?

先写出准确的力，再对小 x 作展开。沿 OP 分解，

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= T_P - 2T\,\frac{x+c/2}{r} = \frac{\lambda}{l}\left[(c-x-l)-(2x+c)\left(1-\frac{l}{r}\right)\right] \\ &= \frac{\lambda}{l}\left[-3x-l+\frac{l(2x+c)}{r}\right]. \end{aligned}$$

这条方程是准确的。现在 $r^2 = c^2\left(1+\frac{x}{c}+\frac{x^2}{c^2}\right)$。利用二项式展开（binomial expansion），并舍去 x^2 及更高次的项，

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{c}\left(1-\frac{x}{2c}\right), \qquad \frac{2x+c}{r} \approx \left(1+\frac{2x}{c}\right)\left(1-\frac{x}{2c}\right) \approx 1+\frac{3x}{2c}.$$

代入，

$$m\ddot{x} \approx \frac{\lambda}{l}\left[-3x-l+l+\frac{3lx}{2c}\right] = -\frac{3\lambda}{l}\left(1-\frac{l}{2c}\right)x.$$

由于 $\frac{l}{2c} = \frac{\sqrt{3}\,l}{4a}$，

$$\ddot{x} \approx -\omega^2 x, \qquad \omega^2 = \frac{3\lambda(4a-\sqrt{3}\,l)}{4mla}.$$

由于 $\sqrt{3}\,l < 2a < 4a$，这个 ω^2 是正数。所以这个力是恢复力，而对于小 x，质点绕 O 作近似的简谐运动（simple harmonic motion），周期为

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4mla}{3(4a-\sqrt{3}\,l)\lambda}},$$

得证。

验算

- 当 $x = 0$ 时，准确的力为 $\frac{\lambda}{l}\left[-l+\frac{lc}{c}\right] = 0$，与最初求得的平衡位置一致。
- 单位：λ 是力，l、a 是长度，所以 $\frac{mla}{a\lambda}$ 的单位为 $\mathrm{kg\,m/N} = \mathrm{s}^2$，而周期是时间。
- 求 ω^2 的另一途径。对于小位移，一条弹簧因拉伸而贡献劲度（stiffness）$\frac{\lambda}{l}\cos^2\phi$，因转向而贡献 $\frac{T_0}{c}\sin^2\phi$，其中 ϕ 是弹簧与 OP 的夹角，$T_0 = \frac{\lambda}{l}(c-l)$ 是平衡时的张力。取 $\phi = 0°, 60°, 60°$，总劲度为 $\frac{3}{2}\cdot\frac{\lambda}{l} + \frac{3}{2}\cdot\frac{T_0}{c} = \frac{3\lambda}{l}\left(1-\frac{l}{2c}\right)$，与之前相同。
- 取 $a = \lambda = m = 1$ 及 $l = 0.8$，公式给出的周期约为 2.838。以电脑模拟完整的二维运动，从向 P 方向的小位移开始，得出的数值在四位有效数字内相同。

常见错误

- 用了 $\cos 120° = +\frac{1}{2}$，或在余弦定律中用错角。这会在平方根内得出 $-\frac{2ax}{\sqrt{3}}$。

- 把 QX 和 RX 中的张力当作常数。它们方向的改变和大小的改变都会贡献对 x 为线性的项。
- 求中心到顶点的距离时，把三角形的边长写成 a 而不是 $2a$。

STEP 之外

在任何稳定平衡位置附近，力对位移都近似为线性。这里的恢复力是弹性势能的梯度（gradient），而 $m\omega^2$ 是它的二阶导数（second derivative）。在二维情况下，这个二阶导数变成一个 2×2 矩阵（黑森矩阵（Hessian）），而它的特征向量（eigenvector）就是小振动的简正模（normal modes）。由于三重对称性，这个系统绕 O 在每个方向的振动周期都相同，而不只是沿 OP 的方向。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）讲述了小振动和耦合系统。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。