详细解答

STEP III 2016，第 8 题

纯数学 · 函数方程

> **STEP III 2016，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q8

关键思路

每条方程都把未知函数在 x 的值，与它在某个经变换后的点的值联系起来。如果再施行一次（或第三次）该变换就会回到 x，那么把变换后的点代入方程，便会得到同一组未知量的第二条方程。这样你便有了联立线性方程（simultaneous linear equations），可以像处理普通未知数一样，消去不需要的值。

解答

第 (i) 部分

方程对所有 x 都成立，因此把 x 换成 $-x$ 后仍然成立：

$$\mathrm{f}(-x) + (1+x)\,\mathrm{f}(x) = (-x)^2 = x^2,$$

这正是所求的结果。

现在我们有两条方程，含两个未知量 $\mathrm{f}(x)$ 和 $\mathrm{f}(-x)$。由第二条得 $\mathrm{f}(-x) = x^2 - (1+x)\mathrm{f}(x)$，代入原方程，得

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) + (1-x)(x^2 - (1+x)\mathrm{f}(x)) &= x^2 \\ \mathrm{f}(x)(1 - (1-x^2)) &= x^2 - (1-x)x^2 \\ x^2\,\mathrm{f}(x) &= x^3. \end{aligned}$$

当 $x \neq 0$ 时，可以除以 x^2，得 $\mathrm{f}(x) = x$。当 $x = 0$ 时，原方程变为 $\mathrm{f}(0) + \mathrm{f}(0) = 0$，所以同样有 $\mathrm{f}(0) = 0$。因此

$$\mathrm{f}(x) = x \quad \text{对所有} x.$$

验证：$x+(1-x)(-x)=x-x+x^2=x^2$，符合要求。

想一想 为甚么题目坚持要我们验证答案?

我们的论证只说明了：如果有函数满足该方程，它必定是 $f(x)=x$。它并没有说明这样的函数存在：运算过程中可能丢失了信息，那样的话便没有任何函数可行。代回原方程便填补了这个缺口。

第 (ii) 部分

首先注意，对每个 $x\neq 1$ 都有 $K(x)\neq 1$，因为 $\frac{x+1}{x-1}=1$ 需要 $x+1=x-1$。所以 $K(K(x))$ 有定义；把分子分母同乘以 $x-1$，

$$K(K(x))=\frac{\dfrac{x+1}{x-1}+1}{\dfrac{x+1}{x-1}-1}=\frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)}=\frac{2x}{2}=x.$$

g 的方程是 $g(x)+x\,g(K(x))=x$。由于 $K(x)\neq 1$，我们可以把 x 换成 $K(x)$；又因 $K(K(x))=x$，得

$$g(K(x))+K(x)\,g(x)=K(x).$$

以 K 表示 $K(x)$。于是 $g(K)=K-K\,g(x)$，代入原方程，

$$g(x)+x(K-K\,g(x))=x \quad\Longrightarrow\quad (1-xK)\,g(x)=x-xK.$$

而

$$1-xK=\frac{(x-1)-x(x+1)}{x-1}=-\frac{x^2+1}{x-1},$$
$$x-xK=x\cdot\frac{(x-1)-(x+1)}{x-1}=-\frac{2x}{x-1}.$$

由于 $x^2+1>0$，因子 $1-xK$ 永不为零，所以可以相除：

$$g(x)=\frac{-2x/(x-1)}{-(x^2+1)/(x-1)}=\frac{2x}{x^2+1}\qquad (x\neq 1),$$

符合所求。(可以验证这个函数确实满足方程;例如在 $x=2$ 时,$K(2)=3$,而 $\frac{4}{5}+2\cdot\frac{6}{10}=2$。)

第 (iii) 部分

设 $M(x)=\dfrac{1}{1-x}$。方程为

$$h(x)+h(M(x))=1-x-M(x),$$

而右方只用 x 和 $M(x)$ 表示，这是个好兆头。

这次 M 不是自身的逆（inverse），所以要看重复施行的结果。对 $x \neq 0, 1$：

$$\mathrm{M}(\mathrm{M}(x)) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}, \qquad \mathrm{M}(\mathrm{M}(\mathrm{M}(x))) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{1} = x.$$

所以 M 的周期（period）为三。我们还需要 M 让我们留在定义域（domain）之内：$\mathrm{M}(x)$ 永不为 0，而 $\mathrm{M}(x) = 1$ 只在 $x = 0$ 时发生，因此若 $x \neq 0, 1$，则 $\mathrm{M}(x) \neq 0, 1$ 亦成立。

想一想 施行两次 M 不会回到 x。我们怎样才能得到足够的方程?

利用循环中的全部三个点。记 $a = x$，$b = \mathrm{M}(x)$，$c = \mathrm{M}(b) = \frac{x-1}{x}$，于是 $\mathrm{M}(c) = a$。依次在 a、b、c 应用方程：

$$\begin{aligned} \mathrm{h}(a) + \mathrm{h}(b) &= 1 - a - b, \\ \mathrm{h}(b) + \mathrm{h}(c) &= 1 - b - c, \\ \mathrm{h}(c) + \mathrm{h}(a) &= 1 - c - a. \end{aligned}$$

三式相加再除以二，

$$\mathrm{h}(a) + \mathrm{h}(b) + \mathrm{h}(c) = \tfrac{3}{2} - (a + b + c).$$

减去第二条方程，得

$$\mathrm{h}(a) = \tfrac{3}{2} - a - b - c - (1 - b - c) = \tfrac{1}{2} - a.$$

因此

$$\mathrm{h}(x) = \tfrac{1}{2} - x \qquad (x \neq 0,\ x \neq 1).$$

验证：$(\frac{1}{2} - x) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{1-x}) = 1 - x - \frac{1}{1-x}$，符合要求。

验算

- 在 (i) 中，试 $x = 3$：$3 + (-2)(-3) = 9 = 3^2$。
- 在 (ii) 中，试 $x = -1$：$\mathrm{K}(-1) = 0$，而 $\mathrm{g}(-1) + (-1)\,\mathrm{g}(0) = -1 - 0 = -1$。此外 $\mathrm{K}(0) = -1$，证实了周期为二。
- 在 (iii) 中，试 $x = 2$：循环为 $2 \to -1 \to \frac{1}{2} \to 2$，而 $\mathrm{h}(2) + \mathrm{h}(-1) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$，同时 $1 - 2 - (-1) = 0$。

三个函数亦已经由电脑以精确算术，在两千个随机有理数值上逐一检验每条方程，全部确认无误。

常见错误

- 在 (i) 中除以 x^2 时忘记了 $x = 0$，这情况需要另作（只需一行的）论证。
- 把 $\mathrm{K}(x)$ 或 $\mathrm{M}(x)$ 代入 x 时，没有检查它是否仍在方程成立的定义域之内。
- 在 (iii) 中只代入一次，结果卡在三个未知量上：你需要整个循环。

STEP 之外

映射 $x \mapsto -x$、K 和 M 都是莫比乌斯变换（Möbius transformations）$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$，它们在复合（composition）运算下构成一个群（group）。有限阶（finite order）的变换生成一个有限循环群（cyclic group），而这里的方法就是对该群求和（或消元），这个想法在群表示论（group representation theory）中会再次出现。莫比乌斯映射与 2×2 矩阵相对应，你可以通过把一个矩阵自乘三次，得出 $\mathrm{M}^3 = $ 恒等变换。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）对莫比乌斯变换有精彩的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。