详细解答

STEP III 2016，第 7 题

纯数学 · 单位根

> **STEP III 2016，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q7

本题在 *Beyond STEP* 第 5.4 节正多边形中的距离中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch05/polygon-distances.html

关键思路

距离就是模（modulus），而模的乘积等于乘积的模。若把正多边形放在阿冈图（Argand diagram）上，使其顶点为经旋转的 n 次单位根（roots of unity），那么根据开首的恒等式，距离的乘积就变成某个适当的 w 所对应的 $|w^n-1|$。唯一真正要花心思的，是选好坐标：把 O 放在原点，并令 X_0X_1 的垂直平分线（perpendicular bisector）为实轴，这样 P 就是一个实数。

解答

因式分解

对 $k=0,1,\ldots,n-1$，我们有 $(\omega^k)^n=\mathrm{e}^{2\pi ik}=1$，因此每个 ω^k 都是 z^n-1 的根。这 n 个数互不相同，因为它们的辐角（argument）$2\pi k/n$ 是 $[0,2\pi)$ 中互不相同的数。恒等式两边都是 n 次的首一多项式（monic polynomial），所以它们的差

$$D(z)=(z-1)(z-\omega)\cdots(z-\omega^{n-1})-(z^n-1)$$

的次数（degree）至多为 $n-1$。但 D 在 n 个不同的点 $1,\omega,\ldots,\omega^{n-1}$ 处取值为零，而次数至多为 $n-1$ 的非零多项式最多只有 $n-1$ 个根。因此 $D\equiv 0$，即

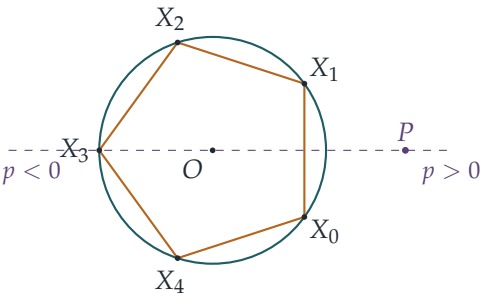
$$\prod_{k=0}^{n-1}(z-\omega^k)=z^n-1\quad\text{对所有复数}z.$$

第 (i) 部分

我们假设顶点沿圆周依次标记，因此 X_0 与 X_1 相邻，且 $\angle X_0OX_1 = 2\pi/n$。旋转或反射图形都不会改变任何距离，所以可以把 O 放在原点，并令

$$X_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-1)\pi/n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}\,\omega^k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

于是 $X_0 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}$ 与 $X_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}$ 互为关于实轴的反射，所以 X_0X_1 的垂直平分线就是实轴。与 X_0 和 X_1 等距的点恰好就是这条直线上的点，所以 P 是一个实数 p，且 $|OP| = |p|$。X_0X_1 的中点是 $\cos(\pi/n) > 0$，因此 $p > 0$ 表示 P 与边 X_0X_1 位于 O 的同一侧。



（图中所示为 $n = 5$；当 n 为奇数时，通过 O 的这条直线亦会经过对面的顶点。）

现在，利用 $|ab| = |a||b|$ 及 $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}| = 1$，

$$\begin{aligned}|PX_0|\,|PX_1|\cdots|PX_{n-1}| &= \prod_{k=0}^{n-1}|p - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}\omega^k| = \prod_{k=0}^{n-1}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/n}|\,|p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n} - \omega^k| \\ &= \left|\prod_{k=0}^{n-1}\left(p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n} - \omega^k\right)\right| = \left|\left(p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}\right)^n - 1\right|,\end{aligned}$$

这里用了因式分解（factorisation），并取 $z = p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}$。由于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$，

$$|PX_0|\,|PX_1|\cdots|PX_{n-1}| = |-p^n - 1| = |p^n + 1|.$$

? **想一想** 为甚么 p 的正负号对奇数 n 有影响，对偶数 n 却没有影响?

若 n 为偶数，则无论 p 的正负号如何，都有 $p^n = |p|^n \geq 0$，所以 $|p^n + 1| = |p|^n + 1$，从而

$$|PX_0| \times |PX_1| \times \cdots \times |PX_{n-1}| = |OP|^n + 1,$$

这正是所求的结果。若 n 为奇数，则 p^n 与 p 同号，需分两种情况。

- 若 P 位于由 O 出发、经过 X_0X_1 中点的射线（ray）上（$p \geq 0$），则 $p^n = |OP|^n$，乘积为 $|OP|^n + 1$。

- 若 P 位于相反方向的射线上（$p < 0$），对奇数 n 而言，这是由 O 出发、经过顶点 $X_{(n+1)/2}$（位于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$）的射线，则 $p^n = -|OP|^n$，乘积为

$$\big|\,|OP|^n - 1\big|.$$

在第二种情况中，模的符号是不可或缺的：当 P 在圆内时，其值为 $1 - |OP|^n$；当 $P = X_{(n+1)/2}$ 时，其值为 0，这是理所当然的，因为此时其中一段距离为零。

第 (ii) 部分

这次旋转图形，使 $X_k = \omega^k$，因此 $X_0 = 1$。对 $z \neq 1$，因式分解给出

$$(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}) = \frac{z^n - 1}{z-1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}.$$

两端都是多项式，而且在无限多个点（每个 $z \neq 1$）上取值相同，所以它们对所有 z 都相等，包括 $z = 1$。代入 $z = 1$：

$$(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1}) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = n.$$

取模，并利用 $|1 - \omega^k| = |X_0X_k|$，

$$|X_0X_1| \times |X_0X_2| \times \cdots \times |X_0X_{n-1}| = n,$$

这正是所求的结果。

验算

- 正方形（$n = 4$），取 $P = O$：每段距离都是 1，所以乘积为 $1 = 0^4 + 1$。当 P 很远时，乘积的表现与 $|OP|^n$ 相若，与公式相符。
- 等边三角形（$n = 3$），P 在远侧且与 O 相距 2：各距离为 1（到位于 -1 的对面顶点）及两次 $\sqrt{(-2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \sqrt{7}$，得出 $7 = 2^3 - 1$。
- 正方形的第 (ii) 部分：$|X_0X_1|\,|X_0X_2|\,|X_0X_3| = \sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2} = 4$。三个结果亦已用电脑就随机的 n、旋转及 P 的位置加以验证。

常见错误

- 在第 (i) 部分把 X_0 放在 1：这样 X_0X_1 的垂直平分线便是倾角为 π/n 的直线，而不是实轴，代数运算会更繁复。应按 P 的位置来选取坐标。
- 在奇数情况且 P 在远侧时忘记取模：当 P 在圆内时，$|OP|^n - 1$ 是负数。
- 直接把 $z = 1$ 代入 $\dfrac{z^n - 1}{z - 1}$；能够证明其值为 n 的，是那条多项式恒等式。

STEP 之外

第 (ii) 部分其实是说 $z^n - 1$ 在 $z = 1$ 处的导数（derivative）为 n：一般而言，若 $f(z) = \prod(z - a_k)$，则 $f'(a_0) = \prod_{k \neq 0}(a_0 - a_k)$。这类对单位根所取的乘积，出现于分圆多项式（cyclotomic polynomials）的理论及判别式（discriminant）的计算之中；而第 (i) 部分本质上是罗杰·科茨（Roger Cotes）的一个经典结果，涉及正多边形对称轴上一点到各顶点的距离。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）是欣赏复数乘法这种几何意义如何发展的绝佳读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。