详细解答

STEP III 2016，第 6 题

纯数学 · 双曲函数

STEP III 2016，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s3-q6

关键思路

把 $\operatorname{sech} x = a\tanh x + b$ 两边乘以 $\cosh x$，得 $a\sinh x + b\cosh x = 1$，这正是开首部分所处理的组合。因此第一步就是把大家熟悉的“$R\cos(x+\alpha)$”技巧搬到双曲函数（hyperbolic functions）上。与三角函数的情况不同，所得的形式取决于 B 与 $\pm A$ 的大小关系，而每种形式都能让你立即看出解的个数。

解答

$A\sinh x + B\cosh x$ 的各种形式

展开，

$$R\cosh(x+\gamma) = R\sinh\gamma\,\sinh x + R\cosh\gamma\,\cosh x,$$

所以我们需要 $R\sinh\gamma = A$ 及 $R\cosh\gamma = B$。由于 $\cosh^2\gamma - \sinh^2\gamma = 1$，这就迫使 $R^2 = B^2 - A^2$ 及 $\tanh\gamma = A/B$。当 $B > A > 0$ 时，两者都可以满足：取

$$R = \sqrt{B^2 - A^2} > 0, \qquad \gamma = \operatorname{artanh}\frac{A}{B},$$

由于 $0 < A/B < 1$，γ 是存在的。于是 $\cosh\gamma = 1/\sqrt{1 - A^2/B^2} = B/R$，且 $\sinh\gamma = \tanh\gamma\cosh\gamma = A/R$，所以 $R\cosh\gamma = B$ 及 $R\sinh\gamma = A$，符合要求。因此 $A\sinh x + B\cosh x = R\cosh(x+\gamma)$。

其他情况（设 $A > 0$）：

- $-A < B < A$：改为比较 $R\sinh(x+\gamma) = R\cosh\gamma\sinh x + R\sinh\gamma\cosh x$ 的系数，得

$$A\sinh x + B\cosh x = \sqrt{A^2 - B^2}\,\sinh(x+\gamma), \qquad \gamma = \operatorname{artanh}\frac{B}{A}.$$

- $B = A$：$A(\sinh x + \cosh x) = A\mathrm{e}^{x}$。
- $B = -A$：$A(\sinh x - \cosh x) = -A\mathrm{e}^{-x}$。
- $B < -A$：把第一个结果应用于 $-A\sinh x - B\cosh x$（此时 $-B > A$ 而 $-A < 0$；上面的推导其实只需要 $|A| < B$），得

$$A\sinh x + B\cosh x = -\sqrt{B^2 - A^2}\,\cosh(x + \gamma), \qquad \gamma = \operatorname{artanh}\frac{A}{B}.$$

交点方程

由于 $\cosh x > 0$，两曲线相交于

$$\operatorname{sech} x = a\tanh x + b \iff 1 = a\sinh x + b\cosh x. \tag{$*$}$$

第 (i) 部分

当 $b > a > 0$ 时，记 $R = \sqrt{b^2 - a^2}$；于是 $(*)$ 变成

$$\cosh\left(x + \operatorname{artanh}\tfrac{a}{b}\right) = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

若两曲线相交，则此方程有解，所以右方至少为 1。当 $c \geq 1$ 时，$\cosh u = c$ 的解为 $u = \pm\operatorname{arcosh} c$，所以

$$x = \pm\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right) - \operatorname{artanh}\frac{a}{b},$$

这正是所要求的形式。

第 (ii) 部分

当 $a > b > 0$ 时，属于 sinh 的情况：$(*)$ 变成 $\sqrt{a^2 - b^2}\,\sinh\left(x + \operatorname{artanh}\frac{b}{a}\right) = 1$。由于 sinh 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的双射（bijection），两曲线必定恰有一个交点，位于

$$x = \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) - \operatorname{artanh}\frac{b}{a}.$$

第 (iii) 部分

按开首部分的每种情况（取 $A = a > 0$，$B = b$）数算 $(*)$ 的解：

- $b < -a$：左方 $-\sqrt{b^2 - a^2}\cosh(x + \gamma)$ 是负数，所以无解。
- $b = -a$：$-a\mathrm{e}^{-x} = 1$ 无解。
- $-a < b < a$：恰有一个解，与 (ii) 相同；那里的论证对此范围内任何 b 都成立。

- $b = a$：$ae^x = 1$ 只有一个解 $x = -\ln a$。
- $b > a$：若 $1/\sqrt{b^2 - a^2} > 1$，则 $\cosh(x + \gamma) = 1/\sqrt{b^2 - a^2}$ 有两个解；若等于 1，则有一个解；若小于 1，则无解。

> **想一想** 为甚么 $b \le a$ 的情况永远不可能给出两个交点?

在这些情况下，$(*)$ 的左方要么是 x 的严格单调（strictly monotonic）函数（$\sinh(x + \gamma)$ 或 $e^{\pm x}$ 的倍数），要么恒为负数，所以它最多只取值 1 一次。只有先下降再上升的 cosh 形式才能两次达到 1。

所以两曲线相交于两个不同点，当且仅当 $b > a$ 且 $b^2 - a^2 < 1$，即

$$a < b < \sqrt{a^2 + 1}.$$

第 (iv) 部分

由于 $\operatorname{sech} x - (a \tanh x + b) = \operatorname{sech} x \left(1 - a \sinh x - b \cosh x\right)$ 且 $\operatorname{sech} x \neq 0$，两曲线相切（touch）恰好发生在 $g(x) = a \sinh x + b \cosh x - 1$ 有重根（repeated zero）之处，即 $g(x) = g'(x) = 0$。在 sinh 及指数的情况下，$g'(x)$ 是 $\cosh(x + \gamma)$ 或 e^x 的倍数，永不为零，所以没有重根。在 $b > a$ 的情况下，$g(x) = R \cosh(x + \gamma) - 1$ 而 $g'(x) = R \sinh(x + \gamma)$，两者只在 $x + \gamma = 0$ 且 $R = 1$ 时同时为零。因此两曲线相切，当且仅当

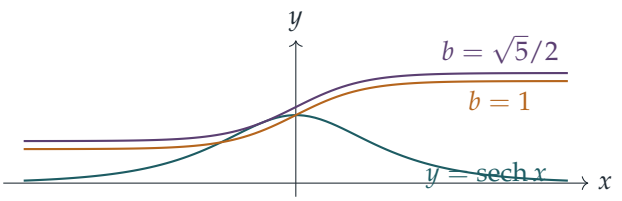
$$b > a \quad \text{且} \quad b^2 - a^2 = 1, \qquad \text{即} \quad b = \sqrt{1 + a^2}.$$

切点的 $x = -\gamma = -\operatorname{artanh}(a/b)$，所以

$$y = \operatorname{sech}\left(\operatorname{artanh} \tfrac{a}{b}\right) = \sqrt{1 - \tfrac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}},$$

这里用了 $\operatorname{sech}^2 u = 1 - \tanh^2 u$ 及 $\operatorname{sech} u > 0$。作为验证，另一条曲线同样给出 $y = -a \cdot \frac{a}{b} + b = \frac{b^2 - a^2}{b} = \frac{1}{b}$。

下图显示 $a = \frac{1}{2}$ 的情况：当 $b = 1$（琥珀色）时有两个交点；当 $b = \sqrt{5}/2$（梅红色）时，两曲线在高度 $2/\sqrt{5}$ 处相切。



验算

取 $a=\frac{3}{4}$，$b=1$，则 $b^2-a^2=\frac{7}{16}<1$，按 (iii) 应有两个交点。此时 $\operatorname{arcosh}(4/\sqrt{7})=\ln\bigl((4+3)/\sqrt{7}\bigr)=\ln\sqrt{7}$，而 $\operatorname{artanh}\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\ln 7=\ln\sqrt{7}$，所以 (i) 的公式给出 $x=0$ 及 $x=-\ln 7\approx -1.946$。在 $x=0$ 处，两曲线都经过 $(0,1)$，与预期相符。另外，以电脑对大量随机的 a 和 b 检验 $(*)$，亦确认了每种情况下根的个数，以及相切条件确实给出重根。

常见错误

- 忘记边界情况 $b=\pm a$：此时 cosh 和 sinh 形式都不存在，但该式化为单一个指数函数。
- 在 (iii) 中只写出 $b^2-a^2<1$ 而漏掉 $b>a$：当 $b<a$ 时两曲线仍然相交，但只有一个交点。
- 弄错 γ 的正负号：解是 $\pm\operatorname{arcosh}(\cdot)$ 减去 $\operatorname{artanh}(a/b)$。

STEP 之外

情况的划分由 B^2-A^2 的正负决定：点 (A,B) 位于由直线 $B=\pm A$ 所分隔的某个区域之内，或位于这些直线上。这正是狭义相对论（special relativity）的几何：劳仑兹推动（Lorentz boost）是保持 t^2-x^2 不变的双曲“旋转”，正如普通旋转保持 x^2+y^2 不变；而 $B=\pm A$ 担当光锥（light cone）的角色——那是推动永远无法令你越过的唯一边界。想看更多双曲函数及这类题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。