详细解答

STEP III 2016，第 5 题

纯数学 · 质数的乘积

STEP III 2016，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s3-q5

本题在 *Beyond STEP* 第 1.2 节质数分布得有多稀疏？中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch01/prime-distribution.html

关键思路

中间的二项式系数（binomial coefficient）$\binom{2m+1}{m}$ 并不大（它和它的“孪生”项 $\binom{2m+1}{m+1}$ 与其他各项共同分享总和 2^{2m+1}），但它可被 $m+1$ 与 $2m+1$ 之间的每一个质数（prime）整除。因此这些质数的乘积也不大。把不超过 $2m+1$ 的质数分成“不超过 $m+1$”和“大于 $m+1$”两组，便可以建立一个强归纳法（strong induction）；而偶数完全不会带来额外麻烦，因为它们（除了 2 以外）都不是质数。

解答

第 (i) 部分

在 $(1+x)^{2m+1}$ 的二项展开式（binomial expansion）中代入 $x=1$：

$$\sum_{k=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{k}=2^{2m+1}.$$

左边每一项都是正数。由对称性，$\binom{2m+1}{m}=\binom{2m+1}{m+1}$，而这是和式中两个不同的项。由于 $m\geq 1$，项 $\binom{2m+1}{0}=1$ 是第三个不同的项。因此

$$2\binom{2m+1}{m}=\binom{2m+1}{m}+\binom{2m+1}{m+1}<2^{2m+1},$$

所以 $\binom{2m+1}{m}<2^{2m}$，得证。

第 (ii) 部分

写成

$$\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!\,(m+1)!}, \qquad \text{所以} \qquad m!\,(m+1)!\binom{2m+1}{m} = (2m+1)!.$$

设 p 为满足 $m+1 < p \le 2m+1$ 的质数。那么 p 是 $(2m+1)!$ 的其中一个因数，所以 p 整除右边。但 $m!\,(m+1)!$ 的每个因数都不超过 $m+1 < p$，所以质数 p 不整除其中任何一个，因此 $p \nmid m!\,(m+1)!$。若一个质数整除乘积 ab，它必定整除 a 或 b，所以 $p \mid \binom{2m+1}{m}$。

? **想一想** 每个这样的质数都整除该系数。为甚么它们的乘积也整除它?

这些质数互不相同，所以它们两两互质 (pairwise coprime)，而一个能被若干个两两互质的数整除的数，必能被它们的乘积整除。(等价地，由唯一分解定理 (unique factorisation)，这些质数每一个都出现在 $\binom{2m+1}{m}$ 的质因数分解中。) 所以 $P_{m+1,2m+1}$ 整除 $\binom{2m+1}{m}$。若不存在这样的质数，则 $P_{m+1,2m+1} = 1$，它整除一切整数。

正整数的正因数不会大于该数本身，所以由第 (i) 部分，

$$P_{m+1,2m+1} \le \binom{2m+1}{m} < 2^{2m}.$$

第 (iii) 部分

由于 $m \ge 1$，我们有 $1 < m+1 < 2m+1$。每个质数 $p \le 2m+1$ 要么满足 $p \le m+1$，要么满足 $m+1 < p \le 2m+1$，但不会两者同时成立，所以

$$P_{1,2m+1} = P_{1,m+1}\,P_{m+1,2m+1}.$$

此外 $2 \le m+1 \le 2m$（因为 $m \ge 1$），所以 $k = m+1$ 是假设所涵盖的值之一，从而得到 $P_{1,m+1} < 4^{m+1}$。结合第 (ii) 部分，

$$P_{1,2m+1} < 4^{m+1} \cdot 2^{2m} = 4^{m+1} \cdot 4^m = 4^{2m+1}.$$

第 (iv) 部分

我们对 n 使用强归纳法。设 $S(n)$ 为命题 $P_{1,n} < 4^n$。

基本情况。 $P_{1,2} = 2 < 16 = 4^2$。

归纳步骤。设 $n \ge 3$，并假设 $S(k)$ 对 $k = 2, 3, \ldots, n-1$ 均成立。

- 若 n 是奇数，写成 $n = 2m+1$，其中 $m \ge 1$。那么 $n-1 = 2m$，所以 $S(k)$ 对 $k = 2, \ldots, 2m$ 成立。由第 (iii) 部分得 $P_{1,2m+1} < 4^{2m+1}$，这正是 $S(n)$。

- 若 n 是偶数，则 $n \geq 4$ 是大于 2 的偶数，所以它不是质数。因此不超过 n 的质数恰好就是不超过 $n-1$ 的质数，于是

$$P_{1,n} = P_{1,n-1} < 4^{n-1} < 4^n.$$

想一想 为甚么我们不能对每个 n 都直接使用第 (iii) 部分?

第 (iii) 部分只处理奇数 $2m+1$。对于偶数 n，我们需要另一个论证；而上面的论证很简单，因为大于 2 的偶数不会为乘积添加新的质数。

所以 $S(n)$ 在两种情况下都成立，由强归纳法，$P_{1,n} < 4^n$ 对所有 $n \geq 2$ 成立。

验算

- $m = 3$：$\binom{7}{3} = 35 < 64 = 2^6$。在 $(4, 7]$ 中的质数是 5 和 7，而 $P_{4,7} = 35$ 恰好整除 35。
- $m = 5$：$\binom{11}{5} = 462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$，它可被 $P_{6,11} = 77$ 整除。此外 $462 < 1024$。
- $P_{1,10} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$，远小于 $4^{10} = 1\,048\,576$。电脑验证确认 $P_{1,n} < 4^n$ 对 2 至 1500 的每个 n 都成立。

常见错误

- 在第 (i) 部分把 $<$ 写成 $\leq$：要得到严格不等式，除了两个中间项之外，还需要第三个正项，例如 $\binom{2m+1}{0}$。
- 在第 (iii) 部分，忘记检查 $m+1$ 是否位于假设适用的范围 $2, \ldots, 2m$ 之内。
- 在第 (iv) 部分，只处理奇数 n，或者忘记基本情况 $n = 2$。

STEP 之外

这是艾狄胥（Erdős）对上界 $\prod_{p \leq n} p < 4^n$ 的初等证明。取对数后，它说明切比雪夫（Chebyshev）函数 $\theta(n) = \sum_{p \leq n} \ln p$ 小于 $n \ln 4$。这是切比雪夫定理的其中一半；该定理指出不超过 n 的质数个数的数量级为 $n / \ln n$。艾狄胥用同类的二项式系数论证证明了伯特兰公设（Bertrand's postulate）：在 n 与 $2n$ 之间必定存在一个质数。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是进一步学习初等数论的好选择。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。