详细解答

STEP III 2016，第 4 题

纯数学 · 裂项相消级数

STEP III 2016，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s3-q4

关键思路

题目建议的两个分数之差，原来是通项（general term）的常数倍，因此这个和会伸缩相消（telescoping）：几乎所有项都互相抵消，只剩下首尾两部分。第 (ii) 部分中，把 sech 用指数函数表示并提出一个因子后，每一项看起来就与第 (i) 部分取 $x = \mathrm{e}^{-2y}$ 时的项完全一样。由于 sech 是偶函数（even function），双向无限和便可以折回单向的和。

解答

第 (i) 部分

把建议的差化为公分母（common denominator），

$$\frac{1}{1+x^r} - \frac{1}{1+x^{r+1}} = \frac{x^{r+1}-x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} = (x-1)\,\frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})}.$$

由于 $|x| \neq 1$，故 $x \neq 1$，所以可以除以 $x-1$。（这个条件亦保证 $x \neq -1$，因此没有分母 $1+x^r$ 会等于零：若 $x^r = -1$，则必有 $|x| = 1$。）因此

$$\frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+x^r} - \frac{1}{1+x^{r+1}}\right).$$

由 $r = 1$ 加到 N，每个括号中的第二个分数都与下一个括号的第一个分数抵消，剩下

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N} \frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})} &= \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x^{N+1}}\right)\\ &= \frac{x\,(x^N-1)}{(x-1)(1+x)(1+x^{N+1})},\end{aligned}$$

其中第二个形式是把两个分数合并而得：分子为 $x^{N+1}-x=x(x^N-1)$。

现设 $|x|<1$。当 $N\to\infty$ 时 $x^{N+1}\to 0$，因此部分和（partial sums）趋向

$$\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+x}-1\right)=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{-x}{1+x}=\frac{x}{1-x^2},$$

这正是所求的无穷级数之和。

第 (ii) 部分

对任何实数 t，

$$\operatorname{sech}t=\frac{2}{\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t}}=\frac{2\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}.$$

设 $x=\mathrm{e}^{-2y}$；由于 $y>0$，故 $0<x<1$。于是 $\operatorname{sech}(ry)=2\mathrm{e}^{-ry}/(1+x^r)$，而

$$\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y)=\frac{4\,\mathrm{e}^{-(2r+1)y}}{(1+x^r)(1+x^{r+1})}=4\mathrm{e}^{-y}\,\frac{x^r}{(1+x^r)(1+x^{r+1})},$$

因为 $\mathrm{e}^{-2ry}=x^r$。

> **想一想** 为甚么要把 $\mathrm{e}^{-(2r+1)y}$ 拆成 $\mathrm{e}^{-y}\cdot\mathrm{e}^{-2ry}$?

我们希望分子是 x^r，即分母中出现的同一个 x 的幂，这样第 (i) 部分便可以逐项套用；剩下的因子 e^{-y} 与 r 无关，可以提到和号之外。

由于 $|x|<1$，由第 (i) 部分得

$$\sum_{r=1}^{\infty}\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y)=4\mathrm{e}^{-y}\,\frac{x}{1-x^2}=\frac{4\mathrm{e}^{-y}}{x^{-1}-x}=\frac{4\mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^{2y}-\mathrm{e}^{-2y}}=\frac{4\mathrm{e}^{-y}}{2\sinh 2y},$$

即 $2\mathrm{e}^{-y}\operatorname{cosech}(2y)$，与题目所求相同。把这个和记作 S。

双向无限和

把对所有整数 r 求的和分成三部分：$r\geq 1$、$r\in\{-1,0\}$ 及 $r\leq -2$。

> **想一想** r 为负数的项是怎样的?

对 $r\leq -2$，设 $s=-r-1$，则 $s\geq 1$，且 $r+1=-s$、$r=-(s+1)$。由于 sech 是偶函数，

$$\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y)=\operatorname{sech}((s+1)y)\operatorname{sech}(sy),$$

而当 r 取遍 $-2,-3,\ldots$ 时，s 取遍 $1,2,\ldots$。所以 $r\leq -2$ 的各项之和亦为 S。（两个单向的和都收敛（converge），因此这样拆分双向无限和是合理的。）

中间的两项为

$$r=-1:\ \operatorname{sech}(-y)\operatorname{sech}0=\operatorname{sech}y,\qquad r=0:\ \operatorname{sech}0\operatorname{sech}y=\operatorname{sech}y.$$

因此，利用 $\sinh 2y = 2\sinh y\cosh y$，

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y) = 2S + 2\operatorname{sech} y = \frac{2\mathrm{e}^{-y}}{\sinh y\cosh y} + \frac{2\sinh y}{\sinh y\cosh y}$$
$$= \frac{2(\mathrm{e}^{-y}+\sinh y)}{\sinh y\cosh y}.$$

但 $\mathrm{e}^{-y}+\sinh y = \mathrm{e}^{-y}+\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}) = \cosh y$，所以 $\cosh y$ 互相抵消，得

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y) = \frac{2}{\sinh y} = 2\operatorname{cosech} y.$$

验算

- 取 $N=1$，有限和公式给出 $\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(1+x)(1+x^2)} = \dfrac{x}{(1+x)(1+x^2)}$，正是 $r=1$ 的单一项。
- 取 $x=\frac{1}{2}$：无穷级数之和应为 $\frac{1/2}{3/4}=\frac{2}{3}$，而部分和确实趋近 0.6667。
- 取 $y=1$：$2\mathrm{e}^{-1}\operatorname{cosech} 2 \approx 0.202864$，$2\operatorname{cosech} 1 \approx 1.701836$，两者都与直接对级数求和的结果在多个小数位上吻合（已用电脑对多个 y 值验证）。
- 当 $y\to\infty$ 时，只有 $r=-1,0$ 两项不会消失，每项约为 $2\mathrm{e}^{-y}$，合共约 $4\mathrm{e}^{-y}$；而 $2\operatorname{cosech} y \approx 4\mathrm{e}^{-y}$，亦相符。

常见错误

- 忘记因子 $\frac{1}{x-1}$，或弄错其正负号：该差等于项的 $(x-1)$ 倍，而不是 $(1-x)$ 倍。
- 在双向无限和中，只把 S 乘以二，却忘记 $r=-1$ 及 $r=0$ 两项；这两项涉及 $\operatorname{sech} 0 = 1$，并不属于任何一个单向的和。

STEP 之外

在这里重排及拆分无穷级数是安全的，因为每一项都是正数（级数绝对收敛（converges absolutely））；对于条件收敛（conditionally convergent）的级数，黎曼（Riemann）重排定理（rearrangement theorem）指出，重新排列各项可以令和变成任何你想要的数值——这是大学第一个分析（analysis）课程中会遇到的惊人结果。像 $\operatorname{sech}(ry)\operatorname{sech}((r+1)y)$ 这类乘积对所有整数求和，亦会在椭圆函数（elliptic functions）理论中出现，而这类双边级数（bilateral series）往往有优美的闭合形式。关于级数的分析，可参阅 Abbott, *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。