详细解答

STEP III 2016，第 3 题

纯数学 · 积分与多项式

STEP III 2016，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s3-q3

本题在 *Beyond STEP* 第 4.6 节没有公式的积分中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch04/no-formula.html

关键思路

形如 $\int g(x)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{P}{Q}\,\mathrm{e}^x + \text{常数}$ 的等式，其实只是一个关于导数（derivative）的陈述，所以把右边求导，再消去分母即可。这样问题便化为一个多项式恒等式（polynomial identity），而多项式恒等式有两种处理方法：代入一个精心挑选的值（这里是 $x=-1$），以及比较次数（degree）。

解答

以下把 $P(x)$、$Q(x)$ 简写为 P、Q。由商法则（quotient rule）和积法则（product rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{P}{Q}\,\mathrm{e}^x\right) = \frac{PQ + P'Q - PQ'}{Q^2}\,\mathrm{e}^x.$$

因此，积分等式成立当且仅当此式等于被积函数（integrand）（其中 Q 不是零多项式）。

第 (i) 部分

令导数等于 $\frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^x$，约去 $\mathrm{e}^x \neq 0$ 并去分母，得多项式恒等式

$$(x+1)^2\left(PQ + P'Q - PQ'\right) = \left(x^3-2\right)Q^2. \qquad (*)$$

Q 有因式 $x+1$。在 $(*)$ 中代入 $x=-1$。左边为 0，右边为 $-3\,Q(-1)^2$。因此 $Q(-1)=0$，由因式定理（factor theorem）知 $x+1$ 整除 Q。

次数。P 不是零多项式，否则导数会是 0，而不是被积函数。设 $\deg P = p$、$\deg Q = q$，首项系数（leading coefficient）分别为 $a \neq 0$ 和 $b \neq 0$。在 $PQ + P'Q - PQ'$ 中，PQ 一项的次数为 $p+q$，首项系数为 ab；而 $P'Q$ 和 PQ' 的次数各自至多为 $p+q-1$。所以 $PQ + P'Q - PQ'$ 的次数恰好是 $p+q$，而 $(*)$ 左边的次数是 $p+q+2$。右边的次数是 $3+2q$。因此

$$p+q+2 = 2q+3 \quad \Longrightarrow \quad p = q+1,$$

即 P 的次数恰好比 Q 的次数多一。

$Q = x+1$ 的情况。此时 P 的次数为 2，设 $P = ax^2 + bx + c$。由于 $Q = x+1$、$Q' = 1$，$(*)$ 变为

$$(x+1)^2\big((x+1)P + (x+1)P' - P\big) = (x^3-2)(x+1)^2,$$

约去 $(x+1)^2$ 得

$$xP + (x+1)P' = x^3 - 2.$$

由于 $xP = ax^3 + bx^2 + cx$，而 $(x+1)P' = (x+1)(2ax+b) = 2ax^2 + (2a+b)x + b$，

$$ax^3 + (2a+b)x^2 + (2a+b+c)x + b = x^3 - 2.$$

比较系数：$a = 1$；由常数项得 $b = -2$；于是 x^2 项的条件 $2a + b = 0$ 亦相符；而由 x 项得 $c = -(2a+b) = 0$。因此

$$P(x) = x^2 - 2x, \qquad \int \frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2-2x}{x+1}\,\mathrm{e}^x + \text{常数}.$$

第 (ii) 部分

用反证法（proof by contradiction），假设存在这样的 P 和 Q，且两者没有公因式。和之前一样，求导并去分母，得

$$(x+1)\big(PQ + P'Q - PQ'\big) = Q^2. \qquad (**)$$

代入 $x = -1$ 得 $Q(-1)^2 = 0$，所以 $x+1$ 整除 Q。记

$$Q = (x+1)^n R, \qquad n \geq 1, \quad R(-1) \neq 0,$$

使 n 恰好是 Q 中 $x+1$ 的幂次。于是 $Q' = n(x+1)^{n-1}R + (x+1)^n R'$，而

$$\begin{aligned} PQ + P'Q - PQ' &= (x+1)^n\big(PR + P'R - PR'\big) - n(x+1)^{n-1}PR \\ &= (x+1)^{n-1}\Big[(x+1)\big(PR + P'R - PR'\big) - nPR\Big]. \end{aligned}$$

代入 $(**)$，并从两边约去公因式 $(x+1)^n$（右边是 $(x+1)^{2n}R^2$）：

$$(x+1)\big(PR + P'R - PR'\big) - nPR = (x+1)^n R^2.$$

想一想 为甚么要费功夫把 $x+1$ 的确切幂次抽出来，而不是直接再把 $x=-1$ 代入 $(**)$?

直接把 $x=-1$ 代入 $(**)$，只能告诉我们 $Q(-1)=0$；之后每一项都等于零，我们对 P 一无所知。把 Q 中所有 $x+1$ 的因式移除后，便剩下一项 $-nPR$，它在 $x=-1$ 时不会自动等于零。

现在代入 $x=-1$。由于 $n\geq 1$，右边为 0，左边第一项亦为 0。因此

$$-n\,P(-1)\,R(-1)=0.$$

但 $n\neq 0$ 且 $R(-1)\neq 0$，所以 $P(-1)=0$。于是 $x+1$ 既是 Q 的因式，也是 P 的因式，与两者没有公因式的假设矛盾。所以这样的多项式不存在。 ■

（限定 P、Q 互质（coprime）并无损一般性：任何公因式都可以从 P/Q 中约去，而不改变该函数。）

验算

- 直接对 (i) 的答案求导：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2-2x}{x+1}\right)=\frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$，再加上 $\frac{x^2-2x}{x+1}=\frac{x^3-x^2-2x}{(x+1)^2}$，得 $\frac{x^3-2}{(x+1)^2}$，正如所需。
- 数值上，$\int_0^1 \frac{x^3-2}{(x+1)^2}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\approx -1.359141$，与 $\left[\frac{x^2-2x}{x+1}\mathrm{e}^x\right]_0^1=-\frac{\mathrm{e}}{2}$ 相符。
- 在 (i) 中次数吻合：P 的次数为 2，比 $Q=x+1$ 多一。

常见错误

- 忘记 $P'Q-PQ'$ 的次数小于 $p+q$，因为首项互相抵消；决定次数的只有 PQ。
- 在 (ii) 中，只把 $x=-1$ 代入 $(**)$，求得 $Q(-1)=0$ 便停下来。要得出矛盾，必须用到 Q 中 $x+1$ 的确切幂次。

STEP 之外

第 (ii) 部分说明，$\int \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\,\mathrm{d}x$（本质上就是指数积分（exponential integral）Ei）在这个受限的意义下并不是“初等”（elementary）的。判定一个积分究竟能否用初等函数表示的完整理论，是刘维尔（Liouville）定理以及微分代数（differential algebra）中的 Risch 算法；这里的论证只是其中一个小例子。若想仔细了解上面用到的多项式代数（因式定理、整除性、互质），可参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。