详细解答

STEP III 2016，第 2 题

纯数学 · 抛物线的法线

STEP III 2016，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s3-q2

关键思路

先写出一般点 $(at^2, 2at)$ 处的法线（normal），再问哪些 t 值使法线经过 P。这个条件是一个关于 t 的三次方程（cubic），而且其中一个根 $t = p$ 必定存在（P 处的法线当然经过 P）。把这个根除去，剩下一个二次方程（quadratic），它的两个根正好是 q 和 r。此后的一切都由两根之和与两根之积，即 $q + r$ 和 qr，来推动。

解答

第 (i) 部分

在 $y^2 = 4ax$ 上取 $x = at^2$、$y = 2at$，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2a}{2at} = \dfrac{1}{t}$，所以参数为 t 的点处的法线斜率（gradient）为 $-t$：

$$y - 2at = -t\,(x - at^2), \qquad \text{即} \qquad y + tx = 2at + at^3.$$

（这个形式同样适用于顶点（vertex）$t = 0$，该处的法线就是 x 轴。）

t 处的法线经过 $P(ap^2, 2ap)$ 当且仅当

$$2ap + tap^2 = 2at + at^3.$$

除以 $a > 0$ 并整理，得

$$\begin{aligned} 0 &= 2(p - t) + t(p^2 - t^2) \\ &= (p - t)(2 + t(p + t)) \\ &= (p - t)\,(t^2 + pt + 2). \end{aligned}$$

想一想 为甚么可以舍去因子 $p-t$?

根 $t=p$ 是平凡的那一个：P 本身的法线经过 P。题目说明 $Q\neq P$，所以 $q\neq p$，因子 $p-q$ 不为零。因此

$$q^2+qp+2=0,$$

正是所求。同理 $r^2+rp+2=0$。

第 (ii) 部分

于是 q 和 r 都是 $t^2+pt+2=0$ 的根。由于 $Q\neq R$，有 $q\neq r$，所以它们就是这个方程的两个根，从而

$$q+r=-p,\qquad qr=2.$$

（特别地，判别式（discriminant）为正：$p^2>8$。另外留意，$q=p$ 需要 $2p^2+2=0$，这是不可能的，所以 Q 和 R 自动与 P 不同。）

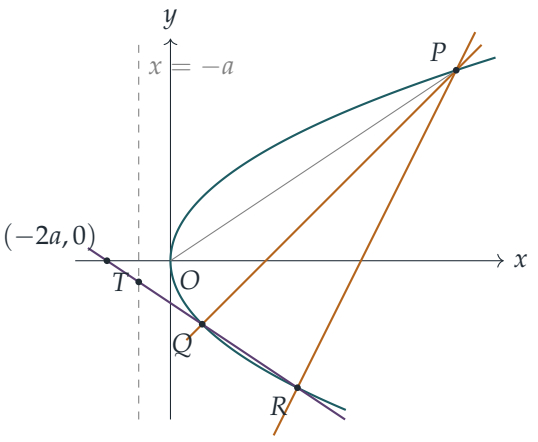
经过 $(aq^2,2aq)$ 和 $(ar^2,2ar)$ 的弦（chord）的斜率为 $\dfrac{2a(q-r)}{a(q^2-r^2)}=\dfrac{2}{q+r}$，其方程为

$$(q+r)\,y=2x+2aqr.$$

（验证：在 Q 处左边是 $2aq^2+2aqr$，与右边相等；在 R 处同理。）代入 $q+r=-p$ 和 $qr=2$：

$$-p\,y=2x+4a.$$

无论 p 取何值，点 $(-2a,0)$ 都满足这个方程。所以 QR 必定经过 $(-2a,0)$，而这一点与 P 的选取无关。



上图显示 $a=1$、$p=3$ 的情况，此时 $q=-1$、$r=-2$：两条法线（琥珀色）相交于 P，弦 QR（紫红色）经过 $(-2,0)$，而 T 位于虚线 $x=-1$ 上。

第 (iii) 部分

由于 $p^2 > 8$，$p \neq 0$，所以 $P \neq O$，直线 OP 为 $y = \dfrac{2ap}{ap^2}\,x = \dfrac{2}{p}\,x$，即 $x = \frac{1}{2}py$。（它与 QR 不平行，因为后者的斜率是 $-2/p$。）

把 $x = \frac{1}{2}py$ 代入 QR 的方程：

$$-py = py + 4a \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{2a}{p}, \qquad x = \tfrac{1}{2}p\Big(-\frac{2a}{p}\Big) = -a.$$

所以 $T = (-a, -\frac{2a}{p})$，它必定位于直线 $x = -a$（抛物线的准线（directrix））上，与 P 的选取无关。

T 与 x 轴的距离是 $\dfrac{2a}{|p|}$。由第 (ii) 部分可知，经过 P 存在两条不同的法线，这迫使 $p^2 > 8$，即 $|p| > 2\sqrt{2}$。由于 $a > 0$，

$$\frac{2a}{|p|} < \frac{2a}{2\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

证明完毕。不等式是严格的，因为 $p^2 = 8$ 会使 $q = r$。

验算

- 在图中 $a = 1$、$p = 3$ 的情况下：$t^2 + 3t + 2$ 的根是 -1 和 -2；法线 $y = x - 3$ 和 $y = 2x - 12$ 都经过 $P(9, 6)$；经过 $(1, -2)$ 和 $(4, -4)$ 的弦是 $-3y = 2x + 4$，它经过 $(-2, 0)$；而 $T = (-1, -\frac{2}{3})$，且 $\frac{2}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$。
- 令 $|p| \to 2\sqrt{2}$ 从上方趋近，Q 和 R 会合而为一，T 的高度趋于 $a/\sqrt{2}$，所以这个界是最佳的。以电脑对 20,000 组随机选取的 a 和 p 进行检验，所有结果均得到确认，T 的高度最高达到 $a/\sqrt{2}$ 的 0.9996 倍，但从未超过。

常见错误

- 忘记说明为何可以除以 $p - q$：正是条件 $Q \neq P$ 容许这样做。
- 没有利用 $q \neq r$ 来说明 q 和 r 都是同一个二次方程的根，而这正是得出 $q + r = -p$ 和 $qr = 2$ 的依据。
- 证明最后的界时没有交代 $p^2 > 8$ 从何而来：它来自二次方程必须有两个相异实根这一要求。

STEP 之外

第 (i) 部分背后关于 t 的三次方程，是一个经典事实的特例：对一般点 (h,k)，条件是 $at^3+(2a-h)\,t-k=0$，所以从平面上一点最多可以作三条抛物线的法线，而“一条法线”与“三条法线”两个区域之间的分界是一条称为渐屈线（evolute）的曲线（这里是一条半立方抛物线（semicubical parabola））。渐屈线、包络线（envelope）和曲率（curvature）都是曲线微分几何（differential geometry）入门课程的标准课题。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶题》）收录了更多这种坐标几何风格的 STEP 题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。