详细解答

STEP III 2016，第 11 题

力学 · 功率与阻力

STEP III 2016，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

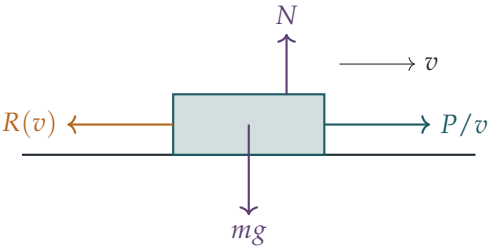
step.maths.org/questions/16-s3-q11

关键思路

以恒定功率（power）P 运作的引擎，在速率 v 时产生的牵引力为 P/v。由于我们要求的是以速率表示的距离，而非以时间表示，所以把加速度写成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。这样，牛顿第二定律（Newton's second law）就变成一条关于 x 与 v 的可分离变量微分方程（separable equation）。在 $4U$ 时加速度为零这个条件，可以把阻力常数以 P 和 U 表示出来，之后每段距离都归结为一个定积分。

解答

我们把汽车模拟为一个质量为 m 的质点，沿水平直线运动，向前的牵引力为 P/v，向后的阻力为 $R(v)$。在铅垂方向，重量与法向反作用力互相抵消，此后不再起任何作用。



利用 $a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，水平方向的运动方程为

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{P}{v} - R(v), \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} = \frac{mv^2}{P - vR(v)}.$$

在两个模型中，$vR(v)$ 都随 v 递增，并在 $v = 4U$ 时等于 P。因此当 $U \le v \le 2U$ 时分母

为正，汽车在整个过程中确实一直在加速，即 x 随 v 递增，而所求距离为

$$X = \int_U^{2U} \frac{mv^2}{P - vR(v)}\,\mathrm{d}v.$$

第 (i) 部分

设 $R = kv$。在 $4U$ 时加速度为零，得 $\dfrac{P}{4U} = 4kU$，所以 $k = \dfrac{P}{16U^2}$。于是

$$P - kv^2 = k\,(16U^2 - v^2), \qquad \frac{m}{k} = \frac{16mU^2}{P} = \frac{1}{\lambda U}.$$

因此

$$\lambda X_1 = \frac{1}{U}\int_U^{2U} \frac{v^2}{16U^2 - v^2}\,\mathrm{d}v = \int_1^2 \frac{w^2}{16 - w^2}\,\mathrm{d}w,$$

其中代入了 $v = Uw$。把被积函数写成 $\dfrac{w^2}{16 - w^2} = -1 + \dfrac{16}{16 - w^2} = -1 + \dfrac{2}{4 - w} + \dfrac{2}{4 + w}$，得

$$\begin{aligned}\lambda X_1 &= \Big[-w + 2\ln\frac{4 + w}{4 - w}\Big]_1^2 \\ &= -1 + 2\ln 3 - 2\ln\tfrac{5}{3} = 2\ln\tfrac{9}{5} - 1,\end{aligned}$$

此即所求。

第 (ii) 部分

现设 $R = cv^2$。在 $4U$ 时加速度为零，得 $\dfrac{P}{4U} = 16cU^2$，所以 $c = \dfrac{P}{64U^3}$。于是

$$P - cv^3 = c\,(64U^3 - v^3), \qquad \frac{m}{c} = \frac{64mU^3}{P} = \frac{4}{\lambda}.$$

? **想一想** 这里有没有简洁的原函数？还是需要再用一次部分分式？

分子 v^2 除了相差一个常数倍外，正是分母 $64U^3 - v^3$ 的导数。所以这个积分可以直接得出对数：

$$\begin{aligned}\lambda X_2 &= 4\int_U^{2U} \frac{v^2}{64U^3 - v^3}\,\mathrm{d}v = 4\Big[-\tfrac{1}{3}\ln(64U^3 - v^3)\Big]_U^{2U} \\ &= \tfrac{4}{3}\ln\frac{63U^3}{56U^3} = \tfrac{4}{3}\ln\tfrac{9}{8},\end{aligned}$$

此即所求。

第 (iii) 部分

由于 $\lambda > 0$，$X_1 > X_2$ 当且仅当 $\lambda X_1 - \lambda X_2 > 0$。题目只给出 $\ln 24$ 和 $\ln 5$ 的界，所以我们把差改写成以这两者表示：

$$\begin{aligned}\lambda(X_1 - X_2) &= 2\ln 9 - 2\ln 5 - 1 - \tfrac{4}{3}\ln 9 + \tfrac{4}{3}\ln 8 \\ &= \tfrac{4}{3}\ln 3 + 4\ln 2 - 2\ln 5 - 1 \\ &= \tfrac{4}{3}(\ln 3 + 3\ln 2) - 2\ln 5 - 1 = \tfrac{4}{3}\ln 24 - 2\ln 5 - 1.\end{aligned}$$

> ? **想一想** 每个界应该怎样用，是用上界还是下界?

要证明差为正，我们需要一个下界，所以对 $\ln 24$（带正号）用其下界，对 $\ln 5$（带负号）用其上界：

$$\lambda(X_1 - X_2) > \tfrac{4}{3}(3.17) - 2(1.61) - 1 = 4.22\dot{6} - 3.22 - 1 = 0.00\dot{6} > 0.$$

因此 $X_1 > X_2$：汽车由 U 加速至 $2U$ 期间，阻力与速率成正比时所走的距离，比阻力与速率平方成正比时更远。

这在物理上是合理的。两种阻力在 $v = 4U$ 时相等，但当 $v < 4U$ 时，有 $cv^2 = kv \cdot \frac{v}{4U} < kv$。所以在所考虑的速率范围内，平方定律的阻力较小，汽车加速得更猛，因而更快到达 $2U$。

验算

- 数值上，$\lambda X_1 = 2\ln 1.8 - 1 \approx 0.1756$，$\lambda X_2 = \frac{4}{3}\ln 1.125 \approx 0.1570$，所以差约为 0.0185，是正数，与所得结果一致。用电脑由 $v = U$ 开始按时间逐步模拟运动方程，可把两个数值重现至小数点后五位。
- 单位：$P/(mU^3)$ 的单位是 $\mathrm{W}/(\mathrm{kg\,m^3\,s^{-3}}) = \mathrm{m^{-1}}$，所以 λX 是无量纲的，理应如此。
- 第 (iii) 部分末尾的物理论证，独立地预测了同样的大小次序。

常见错误

- 使用 $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，这样得到的是时间而不是距离。这里需要的是 $v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。
- 在第 (iii) 部分把界用反了。用 3.18 和 1.60 只会得到一个上界，对差的正负号毫无证明作用。
- 忘记余量极小（$0.00\dot{6}$），以致把 $\frac{4}{3}(3.17)$ 四舍五入为 4.2，结果便证不出来。

STEP 之外

把加速度写成 $a = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，是迈向大学力学中能量方法（energy method）的第一步。把运动方程乘以 v，便得到动能的变化率，它等于输入功率减去耗散功率。像 $4U$ 这种两者平衡的速率，是一阶微分方程的平衡点（equilibria），而研究解如何趋近平衡点，正是动力系统（dynamical systems）的起点。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）便以这种风格讨论功、功率及与速度相关的力。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。