详细解答

STEP III 2016，第 10 题

力学 · 平面上的圆周运动

> **STEP III 2016，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q10

关键思路

只要绳子保持拉紧而质点留在斜面上，P 与 A 的距离恒为 a，且 P 位于斜面上，因此它在斜面内的一个圆上运动，圆心是由 A 向斜面所作垂线的垂足。在斜面之内，这不过是在减弱了的重力 $g\sin\alpha$ 下的铅垂圆周运动；在垂直于斜面的方向，绳子把 P 拉离斜面，而法向反作用力（normal reaction）必须保持为正。所以我们先求张力（tension），再求反作用力，然后问两者各自在何处最小。

解答

建立模型

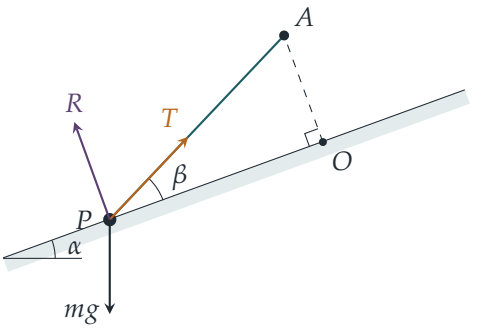
把 P 视为质点，绳子视为轻而不可伸长（inextensible），斜面视为光滑（smooth）。设 O 为由 A 向斜面所作垂线的垂足。由于绳长为 a，且与斜面成角 β，

$$AO = a\sin\beta, \qquad OP = a\cos\beta.$$

在平衡（equilibrium）状态下，除重力外，唯一有沿斜面分量的力是张力，因此绳子必须沿着一条最大斜率线（line of greatest slope），P 位于 O 沿斜面正下方。沿斜面及垂直于斜面方向分解力（张力 T_0，反作用力 R_0）：

$$T_0\cos\beta = mg\sin\alpha, \qquad R_0 + T_0\sin\beta = mg\cos\alpha,$$

所以 $R_0 = mg(\cos\alpha - \sin\alpha\tan\beta) = mg\cos(\alpha+\beta)/\cos\beta$。因此，平衡状态要存在，就必须有 $\cos(\alpha+\beta) > 0$。



上图是开始时经过一条最大斜率线的横切面。AO 垂直于斜面。

施加冲量（impulse）之后，只要绳子保持拉紧而 P 留在斜面上，就有 $AP = a$ 及 $AO = a\sin\beta$，所以由毕氏定理（Pythagoras′ theorem），$OP = a\cos\beta$ 恒成立：P 在斜面内一个以 O 为圆心、半径为

$$r = a\cos\beta$$

的圆上运动。绳子与斜面所成的角恒为 β，而绳子在斜面上的投影由 P 指向 O。冲量是水平的，且平行于斜面，因此它在这个圆的最低点与圆相切。

设 θ 为 OP 与经过 O 向下的最大斜率线所成的角，于是开始时 $\theta = 0$；又设 v 为速率。重量沿斜面向下（在斜面内）的分量为 $mg\sin\alpha$，垂直压入斜面的分量为 $mg\cos\alpha$。

垂直于斜面方向，P 没有加速度，所以

$$R + T\sin\beta = mg\cos\alpha. \tag{1}$$

在斜面内指向 O 的方向，加速度为 v^2/r。张力贡献 $T\cos\beta$，而沿斜面向下的重量分量贡献 $-mg\sin\alpha\cos\theta$：

$$T\cos\beta - mg\sin\alpha\cos\theta = \frac{mv^2}{a\cos\beta}. \tag{2}$$

能量：反作用力和张力都不做功（两者各自垂直于速度），而 P 沿斜面上升的距离为 $r(1-\cos\theta)$，即上升高度为 $r(1-\cos\theta)\sin\alpha$。因此

$$v^2 = u^2 - 2ga\cos\beta\sin\alpha\,(1-\cos\theta). \tag{3}$$

不会立即离开斜面

刚施加冲量后，$\theta = 0$ 且 $v = u$。由 (2) 得 $T\cos\beta = mg\sin\alpha + \dfrac{mu^2}{a\cos\beta}$，再由 (1) 得

$$\begin{aligned} R &= mg\cos\alpha - \tan\beta\left(mg\sin\alpha + \frac{mu^2}{a\cos\beta}\right) \\ &= \frac{m}{\cos\beta}\left(g\cos\alpha\cos\beta - g\sin\alpha\sin\beta\right) - \frac{mu^2\tan\beta}{a\cos\beta} \\ &= \frac{m}{a\cos\beta}\Big(ag\cos(\alpha+\beta) - u^2\tan\beta\Big). \end{aligned}$$

由于 $\cos\beta > 0$，若

$$ag\cos(\alpha+\beta) > u^2\tan\beta,$$

则反作用力为正，质点不会立即离开斜面，此即所求。

完整的圆周

现在把 (3) 代入 (2)，得出一般位置的张力：

$$T\cos\beta = \frac{mu^2}{a\cos\beta} - 2mg\sin\alpha + 3mg\sin\alpha\cos\theta,$$

于是由 (1)，

$$R = mg\cos\alpha - \tan\beta\left(\frac{mu^2}{a\cos\beta} - 2mg\sin\alpha + 3mg\sin\alpha\cos\theta\right).$$

想一想 质点最有可能在圆上哪处离开斜面：顶部还是底部?

从铅垂圆周运动得来的直觉会说“顶部”，但在这里，顶部是绳子的危险位置，而不是斜面的。绳子以 $T\sin\beta$ 的力把 P 拉离斜面，而张力在底部最大，因为 P 在那里速度最快，而斜面内的重力分量也把它拉离 O。事实上，R 在 $\cos\theta$ 最大时最小，即在 $\theta = 0$；而 T 在 $\cos\theta = -1$，即顶部时最小。所以要保持接触地走完整个圆周，我们需要两个条件。

- **底部保持接触**。在 $\theta = 0$ 时 $R > 0$，这正是第一部分的条件：$u^2\tan\beta < ag\cos(\alpha+\beta)$。
- **顶部绳子拉紧**。在 $\theta = \pi$ 时 $T \geq 0$：$\dfrac{u^2}{a\cos\beta} - 5g\sin\alpha \geq 0$，即 $u^2 \geq 5ag\sin\alpha\cos\beta$。（由 (3)，这同时保证顶部有 $v^2 > 0$。）

把第二个条件乘以 $\tan\beta > 0$，可见两者能同时成立，仅当

$$5ag\sin\alpha\cos\beta\tan\beta \leq u^2\tan\beta < ag\cos(\alpha+\beta),$$

即

$$5\sin\alpha\sin\beta < \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \iff 6\sin\alpha\sin\beta < \cos\alpha\cos\beta.$$

两边除以 $\cos\alpha\cos\beta > 0$，得到必要条件

$$6\tan\alpha\tan\beta < 1.$$

（这条件也是充分的：若它成立，则任何满足 $5ag\sin\alpha\cos\beta \le u^2 < ag\cos(\alpha+\beta)/\tan\beta$ 的 u 都可行，因为此时 R 和 T 在圆上每一处都为正。）

验算

- 当 $u = 0$ 时，第一部分的反作用力变成 $mg\cos(\alpha+\beta)/\cos\beta$，与平衡值 R_0 吻合。
- 若 $\beta \to 0$（绳子几乎沿着斜面），绳子无法把质点提起，而条件 $6\tan\alpha\tan\beta < 1$ 自动成立，理应如此。
- 取 $\alpha = 30°$、$\beta = 5°$（于是 $6\tan\alpha\tan\beta \approx 0.30$）、$a = 1\,\mathrm{m}$ 及 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，容许范围是 $24.4 \le u^2 < 91.8$（单位为 $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$）。取 $u^2 = 50$，则最小反作用力约为 $0.37mg$，出现在底部；最小张力约为 $2.63mg$，出现在顶部。我们用电脑在三维空间中沿整个圆周求解牛顿第二定律（Newton's second law），证实 R 和 T 保持为正，数值与上述相符。

常见错误

- 把整条绳长 a 当作圆的半径：半径是 $a\cos\beta$。
- 以为质点最有可能在圆的顶部离开斜面。反作用力其实在底部最小。
- 在能量方程中用 g 而不是 $g\sin\alpha$：质点在铅垂方向只上升 $r(1-\cos\theta)\sin\alpha$。

STEP 之外

这是约束（constraints）下的运动：斜面和绳子各自提供一个反作用力，其大小恰好是维持约束所需的大小，而运动只有在这些力的正负号正确时才成立。在大学一年级的课程中，你会学到如何有系统地处理这类问题，就是利用拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）消去约束，之后再求回反作用力。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）收录了许多正是这类“何时失去接触?”的问题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。