详细解答

# STEP III 2016，第 1 题

纯数学 · 归约公式

> **STEP III 2016，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/16-s3-q1

## 关键思路

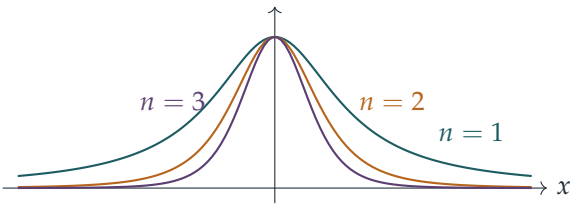
配方（completing the square）把二次式化成 $(x+a)^2+c^2$，其中 $c^2=b-a^2>0$，之后用正切代换（tangent substitution）便可立即求出 $I_1$。至于递推公式（reduction formula），窍门在于对 1 进行分部积分（integration by parts）：对 $(x^2+2ax+b)^{-n}$ 求导会把幂次提升到 $n+1$，这正是我们把 $I_n$ 与 $I_{n+1}$ 联系起来所需要的。其后的归纳法（induction）只不过是整理二项式系数（binomial coefficient）而已。

## 解答

全文记

$$Q(x)=x^2+2ax+b=(x+a)^2+c^2, \qquad c=\sqrt{b-a^2}>0.$$

由于对所有 $x$ 都有 $Q(x)\geq c^2>0$，被积函数（integrand）是连续的；又由于 $Q(x)^n$ 的增长速度与 $x^{2n}$ 相若，且 $2n\geq 2$，所以每个 $I_n$ 都收敛（converge）。




当 $a=0$、$b=1$ 时的被积函数 $1/Q^n$：随着 $n$ 增大，曲线变得愈来愈窄，因此我们预期当 $c=1$ 时 $I_n$ 会逐渐变小。

**第 (i) 部分**

设 $x+a=c\tan u$，则 $\mathrm{d}x=c\sec^2 u\,\mathrm{d}u$。当 $x$ 由 $-\infty$ 变到 $\infty$ 时，$u$ 由 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$，而且

$$Q(x)=c^2\tan^2 u+c^2=c^2\sec^2 u.$$

因此

$$I_1=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{c\sec^2 u}{c^2\sec^2 u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{c}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{c}=\frac{\pi}{\sqrt{b-a^2}},$$

即为所求。

**第 (ii) 部分**

对 $I_n$ 进行分部积分，取 $u=Q^{-n}$ 及 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$。取 $v=x+a$ 比取 $v=x$ 更巧妙（任何原函数（antiderivative）皆可），因为 $Q'(x)=2(x+a)$。于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q^{-n}=-2n(x+a)\,Q^{-n-1},$$

所以

$$I_n=\Big[\frac{x+a}{Q^n}\Big]_{-\infty}^{\infty}+2n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+a)^2}{Q^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

? **想一想** 为甚么边界项（boundary term）会等于零?

分子的增长速度与 $|x|$ 相若，而分母的增长速度与 $x^{2n}$ 相若，又因为 $n\geq 1$，所以 $2n\geq 2$。因此当 $x\to\pm\infty$ 时 $(x+a)/Q^n\to 0$，方括号内的项为零。

接着利用 $(x+a)^2=Q-c^2$ 把余下的积分拆开：

$$\begin{aligned}I_n&=2n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q-c^2}{Q^{n+1}}\,\mathrm{d}x\\&=2n\,I_n-2nc^2\,I_{n+1}.\end{aligned}$$

移项得 $2nc^2I_{n+1}=(2n-1)I_n$，即

$$2n(b-a^2)\,I_{n+1}=(2n-1)\,I_n,$$

即为所求。（由于 $I_n$ 与 $I_{n+1}$ 均收敛，这样拆开积分是合理的。）

**第 (iii) 部分**

设 $P(n)$ 为命题

$$I_n=\frac{\pi}{2^{2n-2}\,c^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1},$$

其中 $c^{2n-1}=(b-a^2)^{n-\frac{1}{2}}$。

**基本情况**。当 $n=1$ 时，右方为 $\dfrac{\pi}{2^0 c^1}\binom{0}{0}=\dfrac{\pi}{c}$，由第 (i) 部分可知它等于 $I_1$。所以 $P(1)$ 成立。

**归纳步骤**。假设对某个 $n\geq 1$，$P(n)$ 成立。由第 (ii) 部分，

$$I_{n+1}=\frac{2n-1}{2nc^2}\,I_n=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2^{2n-2}\,c^{2n+1}}\binom{2n-2}{n-1}.$$

我们要证明它等于 $\dfrac{\pi}{2^{2n}c^{2n+1}}\binom{2n}{n}$，这就是 $P(n+1)$。两个二项式系数之间的关系是

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!\,n!}=\frac{(2n)(2n-1)}{n\cdot n}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}=\frac{2(2n-1)}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

> **想一想** 怎样才能令 2 的幂次吻合?

写成 $\dfrac{2n-1}{2n}=\dfrac{4}{2^2}\cdot\dfrac{2n-1}{2n}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2(2n-1)}{n}$。于是

$$\begin{aligned}I_{n+1}&=\frac{1}{4}\cdot\frac{2(2n-1)}{n}\cdot\frac{\pi}{2^{2n-2}\,c^{2n+1}}\binom{2n-2}{n-1}\\&=\frac{\pi}{2^{2n}\,c^{2n+1}}\cdot\frac{2(2n-1)}{n}\binom{2n-2}{n-1}=\frac{\pi}{2^{2n}\,c^{2n+1}}\binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

由于 $2n=2(n+1)-2$、$n=(n+1)-1$ 及 $c^{2n+1}=(b-a^2)^{(n+1)-\frac12}$，这正是 $P(n+1)$。由归纳法，$P(n)$ 对所有正整数 $n$ 成立：

$$I_n=\frac{\pi}{2^{2n-2}(b-a^2)^{n-\frac12}}\binom{2n-2}{n-1}.$$

## 验算

- 取 $a=0$、$b=1$ 及 $n=2$，公式给出 $I_2=\frac{\pi}{4}\binom{2}{1}=\frac{\pi}{2}\approx 1.5708$。以数值方法计算 $\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-2}\,\mathrm{d}x$，结果准确至小数点后十位都吻合。
- 正切代换亦给出 $I_n=c^{1-2n}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n-2}u\,\mathrm{d}u$，这是标准的沃利斯积分（Wallis integral），其已知值与公式相符。
- 对多组满足 $b>a^2$ 的随机 $a$ 和 $b$，数值积分证实公式在 $n=1,\ldots,5$ 时成立，因此第 (ii) 部分的递推关系（recurrence）亦获证实。

## 常见错误

- 忘记说明第 (ii) 部分的边界项为何等于零；这需要 $n\geq 1$。

- 在分部积分中取 $v = x$ 而不取 $v = x + a$。这样做仍然可行，但会多出一项 $a\int (x + a)Q^{-n-1}\,\mathrm{d}x$ 需要处理。
- 在归纳步骤中弄错 $b - a^2$ 的幂次：每一步都乘以 $1/c^2$，所以 $c$ 的指数刚好增加 2，由 $2n - 1$ 变为 $2n + 1$。

## STEP 之外

有理函数在整条实数线上的积分，是展示复分析（complex analysis）威力的绝佳例子：留数定理（residue theorem）只需考虑 $1/Q^n$ 在上半平面（upper half-plane）内位于 $z = -a + ic$ 的唯一极点（pole），寥寥数行便能求出 $I_n$。这里出现的中心二项式系数（central binomial coefficient）亦见于 $\pi$ 的沃利斯乘积（Wallis product）及随机漫步（random walk）之中。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）以优美的几何方式阐述留数。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。