详细解答

STEP II 2016，第 9 题

力学 · 动量与能量损失

STEP II 2016，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

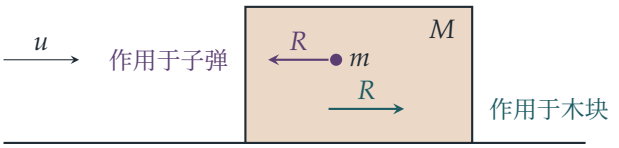
step.maths.org/questions/16-s2-q9

关键思路

阻力 R 是子弹与木块之间的内力（internal force）：它令子弹减速，而根据牛顿第三定律（Newton's third law），它同时以相同大小把木块向前推。因此两者组成的系统动量守恒（conservation of momentum），但动能（kinetic energy）并不守恒。损失的能量恰好等于 R 沿子弹在木块内移动的相对距离所做的功。对木块单独应用功能原理（work–energy principle），便可求出木块移动的距离。

解答

我们把子弹和木块视为沿同一条水平直线运动的质点，并假设子弹相对木块运动期间阻力 R 保持不变。取子弹的初始运动方向为正方向。



铅垂方向的力（重力及桌面的法向反作用力）互相平衡，不起任何作用。在水平方向上，子弹受向后的力 R，木块则受向前的力 R。

第 (i) 部分

木块固定时，子弹的减速度恒为 R/m。利用 $v^2 = u^2 + 2\alpha s$，代入末速 0 及 $\alpha = -R/m$：

$$0 = u^2 - \frac{2R}{m}a \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a = \frac{mu^2}{2R}.}$$

（等价地说，克服阻力所做的功 Ra 等于子弹的初始动能 $\frac{1}{2}mu^2$。）

第 (ii) 部分

共同末速度。由于桌面光滑，子弹和木块组成的系统不受任何水平外力。当子弹相对木块静止时，两者以相同速度 V 运动，由动量守恒得

$$mu = (M+m)V \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{mu}{M+m}.$$

> **想一想** 阻力在子弹于木块内的路径上作用了距离 b，但子弹本身相对桌面移动了 $b+c$。能量方程中应该用哪一个距离？

求 b。相对桌面而言，作用于子弹的力 R 所做的功为 $-R(b+c)$，因为子弹移动了 $b+c$；作用于木块的力 R 所做的功为 $+Rc$，因为木块移动了 c。因此对整个系统所做的净功为 $-Rb$：只有相对位移才算数。由功能原理，

$$\begin{aligned} Rb &= \tfrac{1}{2}mu^2 - \tfrac{1}{2}(M+m)V^2 \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2 - \frac{m^2u^2}{2(M+m)} \\ &= \tfrac{1}{2}mu^2\left(1 - \frac{m}{M+m}\right) = \tfrac{1}{2}mu^2 \cdot \frac{M}{M+m}. \end{aligned}$$

由于第 (i) 部分得 $\frac{1}{2}mu^2 = Ra$，两边除以 R 得

$$\boxed{b = \frac{M}{M+m}\,a.}$$

求 c。现在对木块单独应用功能原理。木块由静止开始，最终速率为 V，而它所受的唯一水平力是向前的 R，作用距离为 c：

$$Rc = \tfrac{1}{2}MV^2 = \frac{Mm^2u^2}{2(M+m)^2} = \tfrac{1}{2}mu^2 \cdot \frac{mM}{(M+m)^2}.$$

再次利用 $\frac{1}{2}mu^2 = Ra$，

$$\boxed{c = \frac{mM}{(M+m)^2}\,a.}$$

另一方法：运动学。子弹以 R/m 减速，木块以 R/M 加速。当 $u - Rt/m = Rt/M$ 时两者速度相等，所以

$$t = \frac{mMu}{R(M+m)}, \qquad c = \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{M}\,t^2 = \frac{m^2Mu^2}{2R(M+m)^2},$$

与上面的结果一致；而 b 则等于子弹的位移减去 c。

验算

- 当 $M \to \infty$ 时，木块的表现犹如固定不动：$b \to a$ 且 $c \to 0$，正合所料。
- 由于 $\frac{M}{M+m} < 1$，故 $b < a$：可移动的木块把较少的子弹能量转化为热，所以子弹穿入得没有那么深。
- 取 $M = 4m$，得 $b = \frac{4}{5}a$ 及 $c = \frac{4}{25}a$。以细小的时间步长逐步数值模拟运动，并随机选取多组 m、M、u 和 R，所得的 a、b 和 c 均准确至四位有效数字。

常见错误

- 在能量损失方程中用了子弹相对桌面的距离 $b + c$，而非相对距离 b。
- 假设碰撞中动能守恒；事实并非如此，损失的 Rb 就是所产生的热。
- 忘记木块同样受到力 R 的作用（牛顿第三定律），以致无法解释木块的运动。

STEP 之外

内力只有在没有相对运动时才做零净功，这个事实正是严谨处理质点系能量的起点。在质心参考系（centre-of-mass frame）中处理，问题就变得简洁：可供耗散的动能为 $\frac{1}{2}\mu u^2$，其中约化质量（reduced mass）$\mu = mM/(M+m)$，而这恰好就是本题中的 Rb。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对这些概念有详尽的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。