详细解答

STEP II 2016，第 8 题

纯数学 · 以积分近似求和

STEP II 2016，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s2-q8

关键思路

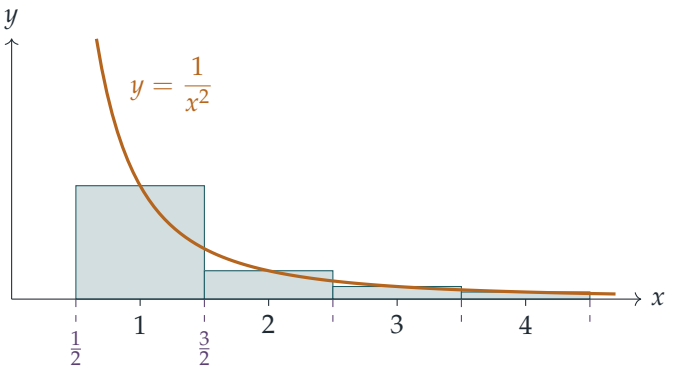
项 $\frac{1}{r^2}$ 是一个宽 1、高 $\frac{1}{r^2}$ 的长方形的面积。若这个长方形以 $x = r$ 为中心，它的面积就非常接近 $y = \frac{1}{x^2}$ 在 $r - \frac{1}{2}$ 与 $r + \frac{1}{2}$ 之间曲线下的面积，这就是中点法则（midpoint rule）。把这些窄条拼接起来，一个和式就变成一个积分。接着可以准确算出每一窄条的误差（error），而把这些误差加起来，几乎不费吹灰之力就得到第二个级数（series）$\sum \frac{1}{r^4}$。

解答

积分与草图

当 $m > \frac{1}{2}$ 时，积分下限为正，所以被积函数（integrand）在积分范围内连续，并且

$$\int_{m-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{m-\frac{1}{2}}^{X} = \frac{1}{m-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2m-1}.$$



以 $x = r$ 为中心的长方形宽 1、高 $\frac{1}{r^2}$，所以面积是 $\frac{1}{r^2}$。在窄条 $r - \frac{1}{2} \le x \le r + \frac{1}{2}$ 上，曲线在左半边位于长方形顶边之上，在右半边则位于其下，而这两小块几乎互相抵消。因此

$$\frac{1}{r^2} \approx \int_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

对 $r = m, m+1, \ldots, n$ 把这些式子相加，各窄条首尾相接，刚好覆盖 $[m - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$，于是得到 $(*)$。

第 (i) 部分

在 $(*)$ 中令 $n \to \infty$。右边趋向我们刚才算出的积分，所以

$$\sum_{r=m}^{\infty} \frac{1}{r^2} \approx \frac{2}{2m-1}.$$

我们可以把这个近似用于整个级数，也可以先准确地加上头几项，只对尾部（tail）作近似：

$$\begin{aligned}
m = 1: &\quad E \approx \frac{2}{1} = 2,\\
m = 2: &\quad E = 1 + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r^2} \approx 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3},\\
m = 3: &\quad E = 1 + \frac{1}{4} + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{1}{r^2} \approx \frac{5}{4} + \frac{2}{5} = \frac{33}{20}.
\end{aligned}$$

这就是题目要求的三个近似值。随着 m 增大，近似应该愈来愈好，因为曲线在愈远处愈平坦，中点近似在那里也愈准确。

第 (ii) 部分

在一个窄条上的积分是

$$\int_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r-\frac{1}{2}} - \frac{1}{r+\frac{1}{2}} = \frac{1}{r^2 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{4r^2-1}.$$

所以用这个积分近似 $\frac{1}{r^2}$ 的误差是

$$\frac{4}{4r^2-1} - \frac{1}{r^2} = \frac{4r^2 - (4r^2-1)}{r^2(4r^2-1)} = \frac{1}{r^2(4r^2-1)} = \frac{1}{4r^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4r^2}}.$$

当 r 很大时，$\frac{1}{4r^2}$ 很小，所以最后一个因子接近 1，误差约为 $\frac{1}{4r^4}$，正如题目所要求。（积分值总是较大，这与图像吻合：$\frac{1}{x^2}$ 是凸函数（convex），所以每个窄条左边多出的面积胜过右边不足的面积。）

至于最后的结果，把由 $r=m$ 起的误差全部加起来。各窄条的积分加起来正是我们最先算出的积分，所以

$$\frac{2}{2m-1}-\sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{r^2}=\sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{r^2(4r^2-1)}\approx\frac{1}{4}\sum_{r=m}^{\infty}\frac{1}{r^4}.$$

想一想 为甚么不取看来最简单的 $m=1$?

取 $m=1$ 时，左边是 $2-1.645=0.355$，得出 $\sum\frac{1}{r^4}\approx 1.42$，这大得太多了。问题在于“$\approx\frac{1}{4r^4}$”只在 r 很大时才准确：在 $r=1$ 时，真正的误差是 $\frac{1}{3}$ 而非 $\frac{1}{4}$，而这第一项主导了整个和。所以我们应该把头几项准确保留，只对尾部使用近似。取 $m=3$（即得出 $\frac{33}{20}$ 的那个选择），最差的因子 $\frac{1}{1-1/(4r^2)}$ 是 $\frac{36}{35}$，与 1 相差不足 3%：

$$\frac{1}{4}\sum_{r=3}^{\infty}\frac{1}{r^4}\approx\frac{2}{5}-\left(E-1-\frac{1}{4}\right)\approx 0.4-0.395=0.005,$$

所以 $\sum_{r=3}^{\infty}\frac{1}{r^4}\approx 0.02$，而

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^4}\approx 1+\frac{1}{16}+0.02=1.0825\approx 1.08.$$

这就是所要求的结果。由于 E 只给到三位小数，E 中最多 0.0005 的误差在这里会变成最多 0.002，结果仍然是 1.08。

验算

- 近似值 2、$\frac{5}{3}\approx 1.667$、$\frac{33}{20}=1.65$ 逐步递减，趋向 $E=\frac{\pi^2}{6}\approx 1.6449$，而且每一个都偏大，正如凸性论证所预测。
- 在 $r=10$ 时，准确误差 $\frac{1}{100\times 399}\approx 2.506\times 10^{-5}$ 非常接近 $\frac{1}{4\times 10^4}=2.5\times 10^{-5}$。
- 准确值是 $\sum\frac{1}{r^4}=\frac{\pi^4}{90}\approx 1.0823$，与我们的 1.0825 吻合。若改用 $m=2$，得 $1+4\left(\frac{2}{3}-0.645\right)\approx 1.087$，明显较差；$m=1$ 则得 1.42。

常见错误

- 在最后一部分使用 $m=1$，而大 r 近似 $\frac{1}{4r^4}$ 在那里并不准确，结果得出 1.42。
- 把误差的正负号弄反：积分大于 $\frac{1}{r^2}$，所以 $\frac{2}{2m-1}$ 是尾部的高估值。
- 忘记把准确计算的头几项（$1+\frac{1}{4}$ 及 $1+\frac{1}{16}$）加回去。

STEP 之外

这就是中点法则，而误差项 $\frac{1}{4r^4}$ 让我们窥见欧拉–麦克劳林公式（Euler–Maclaurin formula）：它以一个积分加上一连串导数项来修正一个和式，而像 $\sum \frac{1}{r^2}$ 这样的和，正是这样计算到许多位小数的。准确值 $\frac{\pi^2}{6}$ 和 $\frac{\pi^4}{90}$ 来自傅里叶级数（Fourier series），或来自欧拉（Euler）对 $\sin x$ 的乘积展开。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）仔细地处理级数与积分，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学问题》）则有更多同类精神的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。