详细解答

STEP II 2016，第 7 题

纯数学 · 利用对称性求定积分

> **STEP II 2016，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q7

关键思路

把区间 $[0, a]$ 关于其中点作反射（reflection），即 $x \mapsto a - x$，积分的值不会改变，但被积函数（integrand）却可能变成一个能与原式漂亮地结合的形式。对于 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上的三角被积函数，这个反射会把 sin 与 cos 互换；在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上，则靠 $\tan(\frac{1}{4}\pi - x)$ 的复角公式（compound-angle formula）来完成工作。最后一部分看似全新，但一次分部积分（integration by parts）就能把它化为第 (iii) 部分。

解答

结果 $(*)$

在 $\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$ 中作代换（substitution）$u = a - x$，于是 $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$；当 $x = 0$ 时 $u = a$，当 $x = a$ 时 $u = 0$。因此

$$\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(u)\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

因为积分变量用甚么名称并不重要。这就是 $(*)$。

第 (i) 部分

设该积分为 I。取 $a = \frac{1}{2}\pi$，有 $\sin(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x$ 及 $\cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \sin x$，所以由 $(*)$ 得

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

把它与 I 的原来形式相加，

$$2I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

所以

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

（分母 $\cos x + \sin x$ 在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上为正，因此不会出问题。）

第 (ii) 部分

现在 $a = \frac{1}{4}\pi$，第 (i) 部分的技巧不再能互换 sin 与 cos。改为把分子分母同除以 $\cos x$（在此区间上为正），被积函数变成

$$\frac{\sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\tan x}{1 + \tan x}.$$

设 $t = \tan x$。由于 $\tan(\frac{1}{4}\pi - x) = \dfrac{1-t}{1+t}$，

$$\frac{\tan(\frac{1}{4}\pi - x)}{1 + \tan(\frac{1}{4}\pi - x)} = \frac{(1-t)/(1+t)}{2/(1+t)} = \frac{1-t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan x.$$

于是设该积分为 J，由 $(*)$ 得

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan x\Big)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\Big[-\ln\cos x\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2. \end{aligned}$$

想一想 有没有方法完全不用 $(*)$ 就能做第 (ii) 部分?

有。设 $K = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x$。那么 $J + K = \frac{1}{4}\pi$；又因为分子 $\cos x - \sin x$ 正是分母的导数，

$$K - J = \Big[\ln(\cos x + \sin x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi} = \ln\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

两式相减，得 $2J = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\ln 2$，与上面的答案一致。

第 (iii) 部分

设该积分为 L。同一条复角公式给出

$$1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - x) = 1 + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \frac{2}{1 + \tan x}.$$

所以由 $(*)$，

$$L=\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\ln\frac{2}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{4}\pi}(\ln 2-\ln(1+\tan x))\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\ln 2-L.$$

因此 $2L=\frac{1}{4}\pi\ln 2$，而

$$L=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

第 (iv) 部分

把分子分母同除以 $\cos^2 x$：

$$\frac{x}{\cos x\,(\cos x+\sin x)}=\frac{x\sec^2 x}{1+\tan x}.$$

? **想一想** $\dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}$ 跟第 (iii) 部分有甚么关系?

它恰好是 $\ln(1+\tan x)$ 的导数，因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+\tan x)=\sec^2 x$；而且在 $[0,\frac{1}{4}\pi]$ 上 $1+\tan x>0$。于是取 $u=x$ 及 $\mathrm{d}v=\dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x$、$v=\ln(1+\tan x)$ 作分部积分：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\frac{x\sec^2 x}{1+\tan x}\,\mathrm{d}x&=\Big[x\ln(1+\tan x)\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi}-\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{\pi}{8}\ln 2\qquad\text{（利用第 (iii) 部分）}\\&=\frac{\pi}{8}\ln 2.\end{aligned}$$

所以第 (iv) 部分的积分与第 (iii) 部分的积分数值相同。

验算

- 第 (i) 部分：被积函数由 0 升至 1，并关于点 $(\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{2})$ 对称，所以其平均值为 $\frac{1}{2}$，积分等于区间长度的一半，即 $\frac{1}{4}\pi$。
- 第 (ii) 部分应小于第 (i) 部分的一半，因为被积函数在 $[0,\frac{1}{4}\pi]$ 上低于 $\frac{1}{2}$：的确 $\frac{1}{8}\pi-\frac{1}{4}\ln 2\approx 0.2194<0.3927$。
- 数值积分（numerical quadrature）（辛普森法则（Simpson's rule））给出四个部分的值分别为 0.785398、0.219412、0.272198 及 0.272198，与 $\frac{1}{4}\pi$、$\frac{1}{8}\pi-\frac{1}{4}\ln 2$ 及 $\frac{1}{8}\pi\ln 2$（两次）吻合。

常见错误

- 忘记代换 $u=a-x$ 会把积分上下限对调；而 $\mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$ 中的负号会把它们调回来。

- 在第 (ii) 部分仿照第 (i) 部分试图互换 sin 与 cos：在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上，反射是 $x \mapsto \frac{1}{4}\pi - x$，而不是 $\frac{1}{2}\pi - x$。
- 写成 $\int \tan x \, \mathrm{d}x = \ln \cos x$；正确应为 $-\ln \cos x$（或 $\ln \sec x$）。

STEP 之外

第 (iii) 部分是经典题：同一个反射技巧可以求出像 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln \sin x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi \ln 2$ 这类积分，而这些积分无法通过初等函数（elementary functions）的原函数（antiderivative）求得。到了大学，这类对称性论证与围道积分（contour integration）及积分号下求导（differentiation under the integral sign）并列，都是处理没有初等原函数的定积分（definite integral）的工具。想看更多富 STEP 风格的例子，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶难题》）；至于为代换法与分部积分提供严格依据的分析（analysis），可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。