详细解答

# STEP II 2016，第 6 题

纯数学 · 切比雪夫多项式方程

**STEP II 2016，第 6 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s2-q6

## 关键思路

每一部分都只需把一个候选函数代入微分方程（differential equation），并检查它在 $x = 1$ 处的条件；其余的就交给唯一性（uniqueness）假设。第 (iii) 及 (iv) 部分的窍门是：永远不要展开 $y_n$（我们并不知道它的明确表达式），而是直接利用方程 $(1 - x^2)y_n'^2 = n^2(1 - y_n^2)$ 本身来消去导数（derivative）。

## 解答

在整个解答中，$y_k$ 满足

$$(1 - x^2)(y_k'(x))^2 = k^2(1 - y_k(x)^2), \qquad y_k(1) = 1,$$

这不过是 $(*)$ 移项后的形式。要证明某函数等于 $y_k$，（根据所假设的唯一性）只需证明它在该 $k$ 值下满足 $(*)$，并且在 $x = 1$ 处取值 1。

### 第 (i) 部分

当 $k = 1$ 时，方程为

$$(1 - x^2)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + y^2 = 1.$$

对于 $y = x$，我们有 $y' = 1$，而左方为 $(1 - x^2) + x^2 = 1$，符合要求。此外 $y(1) = 1$，所以 $y_1(x) = x$。

**第 (ii) 部分**

当 $k = 2$ 时，方程为

$$(1 - x^2)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 4y^2 = 4.$$

对于 $y = 2x^2 - 1$，我们有 $y' = 4x$，所以

$$\begin{aligned}(1 - x^2)(4x)^2 + 4(2x^2 - 1)^2 &= 16x^2 - 16x^4 + 16x^4 - 16x^2 + 4\\ &= 4.\end{aligned}$$

由于 $y(1) = 2 - 1 = 1$，我们得到 $y_2(x) = 2x^2 - 1$。

**第 (iii) 部分**

为简便起见，记 $y = y_n(x)$。以链式法则（chain rule）对 $z = 2y^2 - 1$ 求导，得 $z' = 4yy'$，所以

$$(1 - x^2)z'^2 = 16y^2\,(1 - x^2)y'^2 = 16y^2 \cdot n^2(1 - y^2),$$

这里用到了 $y_n$ 所满足的方程。此外

$$4n^2z^2 = 4n^2(2y^2 - 1)^2 = 4n^2(4y^4 - 4y^2 + 1).$$

两式相加，

$$(1 - x^2)z'^2 + 4n^2z^2 = 16n^2y^2 - 16n^2y^4 + 16n^2y^4 - 16n^2y^2 + 4n^2 = 4n^2,$$

这正是所求的方程。

? **想一想** 这条方程与 $y_{2n}$ 有甚么关系?

由于 $(2n)^2 = 4n^2$，它恰好就是 $k = 2n$ 时的 $(*)$。而且 $z(1) = 2y_n(1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$。所以 $z$ 是 $k = 2n$ 时 $(*)$ 的一个解，并且在 $x = 1$ 处取值 1；根据唯一性，

$$y_{2n}(x) = 2(y_n(x))^2 - 1.$$

作为验证，$n = 1$ 给出 $y_2 = 2x^2 - 1$，与 (ii) 一致；而 $n = 2$ 给出 $y_4 = 2(2x^2 - 1)^2 - 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$。

**第 (iv) 部分**

记 $u = y_m(x)$，于是 $v = y_n(u)$。根据链式法则，

$$v'(x) = y_n'(u)\,y_m'(x).$$

因此，先用 $y_m$ 的方程（在点 $x$），再用 $y_n$ 的方程（在点 $u$），得

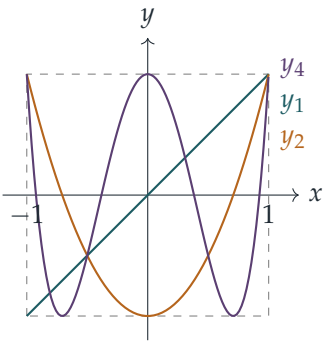
$$\begin{aligned}(1-x^2)v'^2 &= y_n'(u)^2\,(1-x^2)y_m'(x)^2\\ &= y_n'(u)^2\cdot m^2(1-u^2)\\ &= m^2\,(1-u^2)y_n'(u)^2\\ &= m^2\cdot n^2(1-y_n(u)^2) = m^2n^2(1-v^2).\end{aligned}$$

所以 $(1-x^2)v'^2+(mn)^2v^2=(mn)^2$，即 $k=mn$ 时的 $(*)$。最后

$$v(1)=y_n(y_m(1))=y_n(1)=1,$$

所以根据唯一性，$v(x)=y_{mn}(x)$，得证。

$y_n$ 的方程是在点 $u$ 而非点 $x$ 应用的：该方程对其变量的每一个值都成立，所以我们可以用 $u$ 代替 $x$。正是这一步令 (iv) 得以成立。




三条曲线都通过 $(1,1)$，并且在 $[-1,1]$ 上都介乎 $-1$ 与 $1$ 之间，这是方程所迫使的：在该区间上 $(1-x^2)y'^2\geq 0$，所以 $k^2y^2\leq k^2$。

## 验算

- 第 (iii) 部分取 $n=2$，预测 $y_4(x)=8x^4-8x^2+1$。直接代入，$y_4'=32x^3-16x$，而 $(1-x^2)(32x^3-16x)^2+16(8x^4-8x^2+1)^2$ 化简后等于 $16$。在 $x=0.3$ 处，$y_4=0.3448$。
- 第 (iv) 部分取 $m=n=2$：$y_2(y_2(x))=2(2x^2-1)^2-1$，与 (iii) 得出的 $y_4$ 相同，理应如此。
- 以电脑用精确算术验证过：以这种方法构造的多项式对每个不超过 24 的 $k$ 都满足 $(*)$，而且对 $m,n\leq 4$ 有 $y_n(y_m(x))=y_{mn}(x)$。

## 常见错误

- 忘记 $x = 1$ 处的条件。单单满足 $(*)$ 并不足够：$-y_k$ 同样满足它。
- 在 (iii) 或 (iv) 中试图明确展开 $y_n$。我们对 $y_n$ 并没有任何明确的认识；应利用它的微分方程来取代 $(1 - x^2)y_n'^2$。
- 在 (iv) 中，把 $y_n$ 的方程用在 $x$ 上，而不是 $u = y_m(x)$ 上，结果令因子 $(1 - x^2)$ 出现在错误的位置。

## STEP 之外

函数 $y_k$ 就是切比雪夫多项式（Chebyshev polynomials）$T_k$：设 $x = \cos\theta$，$(*)$ 便化为 $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)^2 = k^2(1 - y^2)$，其解为 $y = \cos k\theta$，因此 $T_k(\cos\theta) = \cos k\theta$。于是第 (iii) 部分就是二倍角公式，而第 (iv) 部分说的是 $\cos\big(n(m\theta)\big) = \cos(mn\theta)$。不过要提醒一句：题目容许你假设的唯一性其实并不完全成立，因为常数函数 $y = 1$ 同样满足 $(*)$ 及 $y(1) = 1$。像这样导数只能确定至正负号的方程，正是使用唯一性定理时须格外小心的地方；Boyce 与 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）讨论了解的存在性与唯一性。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。