详细解答

STEP II 2016，第 5 题

纯数学 · 二项式系数恒等式

STEP II 2016，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s2-q5

关键思路

三条恒等式（identity）都源自同一个技巧：把一个函数用两种方式写成乘积，然后比较 x 某一个幂的系数（coefficient）。若一个和式由二项式系数（binomial coefficient）的乘积组成，而各下标之和固定，那正正就是把两个幂级数（power series）相乘后读出某一项系数所得的结果。题目约定在 $p \geq q \geq 0$ 以外 $\binom{p}{q} = 0$，正因如此，和式可以在一个整齐的 j 范围内求和，而不必费神理会哪些项存在。

解答

第 (i) 部分

当 $|x| < 1$ 时，由二项式级数（binomial series）可得 $(1-x)^{-N}$ 中 x^n 的系数为

$$\frac{(-N)(-N-1)\cdots(-N-n+1)}{n!}(-1)^n = \frac{N(N+1)\cdots(N+n-1)}{n!} = \frac{(N+n-1)!}{n!\,(N-1)!} = \binom{N+n-1}{n}.$$

各因子带来的 n 个负号，与 $(-x)^n$ 带来的 n 个负号互相抵消。因此

$$(1-x)^{-N} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N+n-1}{n} x^n \qquad (|x| < 1).$$

（当 $n = 0$ 时，系数为 $\binom{N-1}{0} = 1$。由于 $N \geq 1$，这没有问题。）

现在 $(1-x)^{-1}(1-x)^{-N} = (1-x)^{-(N+1)}$。把上述展开式中的 N 换成 $N+1$，可知右边 x^n 的系数为 $\binom{N+n}{n}$。

在左边，$(1-x)^{-1} = \sum_{i\geq 0} x^i$ 的每一项系数都等于 1。$(1-x)^{-N}$ 中的 x^j 项必须与 $(1-x)^{-1}$ 中的 x^{n-j} 配对，而 j 由 0 取到 n。所以乘积中 x^n 的系数为

$$\sum_{j=0}^{n} 1 \cdot \binom{N+j-1}{j}.$$

两个幂级数在 $|x|<1$ 时都收敛（converge），并在该处表示同一个函数，因此它们的系数相同。于是得到

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{N+j-1}{j} = \binom{N+n}{n},$$

即为所求。

第 (ii) 部分

利用 $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$，三者皆为多项式（polynomial）。按题目的约定，可以写成

$$(1+x)^m = \sum_{j\geq 0} \binom{m}{j} x^j, \qquad (1+x)^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^k,$$

因为 $j > m$ 或 $k > n$ 的系数均为零。乘积中 x^r 的系数来自满足 $j+k=r$ 的配对，即 $k = r-j$ 且 $0 \leq j \leq r$：

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}.$$

? **想一想** 那么 $j > m$ 或 $r-j > n$ 的项又如何？这些幂并不出现在多项式之中。

这些项含有因子 $\binom{m}{j}$（其中 $j > m$）或 $\binom{n}{r-j}$（其中 $r-j > n$），按约定它们都是零。它们没有任何贡献，同时也不对应任何实际的项的乘积，所以在 $0 \leq j \leq r$ 上求和恰好正确。$(1+x)^{m+n}$ 中 x^r 的系数为 $\binom{m+n}{r}$。相等的多项式有相同的系数，因此

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}.$$

第 (iii) 部分

因子 $(-1)^j\binom{m+j-1}{j}$ 提示我们用第 (i) 部分，并以 $-x$ 代替 x。在第 (i) 部分的展开式中以 $-x$ 代替 x，并以 m 代替 N，可得

$$(1+x)^{-m} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{m+j-1}{j} x^j \qquad (|x|<1).$$

? **想一想** 应该用哪一个乘积？

另一个因子 $\binom{N+m}{n-j}$ 是 $(1+x)^{N+m}$ 的系数，而答案 $\binom{N}{n}$ 是 $(1+x)^N$ 的系数。由于 m 是正整数，当 $|x|<1$ 时有

$$(1+x)^{N+m}(1+x)^{-m}=(1+x)^N.$$

在左边，$(1+x)^{N+m}=\sum_{k\geq 0}\binom{N+m}{k}x^k$（对 $k>N+m$ 使用上述约定）。x^n 的系数来自 $(1+x)^{-m}$ 中的 x^j 乘以 $(1+x)^{N+m}$ 中的 x^{n-j}，其中 $0\leq j\leq n$：

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{N+m}{n-j}(-1)^j\binom{m+j-1}{j}.$$

在右边，$(1+x)^N$ 中 x^n 的系数为 $\binom{N}{n}$。当 $n>N$ 时，按约定它等于 0，这也是正确的，因为 $(1+x)^N$ 的次数是 N。两边在 $|x|<1$ 上相等，所以它们的幂级数系数相同：

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{N+m}{n-j}\binom{m+j-1}{j}=\binom{N}{n}.$$

验算

- 第 (i) 部分，取 $N=2$、$n=3$：$1+2+3+4=10=\binom{5}{3}$。
- 第 (ii) 部分，取 $m=n=2$、$r=2$：$1\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 1=6=\binom{4}{2}$。
- 第 (iii) 部分，取 $m=2$、$N=3$、$n=2$：$\binom{5}{2}\binom{1}{0}-\binom{5}{1}\binom{2}{1}+\binom{5}{0}\binom{3}{2}=10-10+3=3=\binom{3}{2}$。当 $n>N$ 时，这个正负交替的和应该等于 0。例如取 $m=1$、$N=1$、$n=2$，得 $\binom{2}{2}-\binom{2}{1}+\binom{2}{0}=1-2+1=0$。

三条恒等式亦已用电脑对所有 $m,N\leq 9$ 及 $n\leq 24$ 验证过。

常见错误

- 在 $(1-x)^{-N}$ 的系数中弄乱了正负号。那里有两组 $(-1)^n$，两者互相抵消。
- 在第 (iii) 部分，忘记 $(1+x)^{-m}$ 的级数是无穷级数，只在 $|x|<1$ 时成立。比较系数之所以成立，是因为在某区间上相等的两个幂级数，其系数相同。

STEP 之外

这就是*生成函数*（generating functions）的方法：把一个数列编码为某幂级数的系数，于是级数相乘便化为这里所见的卷积（convolution）和。第 (ii) 部分是范德蒙恒等式（Vandermonde's identity），而第 (i) 部分常被称为曲棍球棒恒等式（hockey-stick identity）。

两者都有漂亮的组合计数证明（counting proof），值得自己找找看。Wilf 的 *generating-functionology*（可在网上免费阅读），以及 Graham、高德纳（Knuth）与 Patashnik 合著的 *Concrete Mathematics*（《具体数学》），都把这套工具发展得更深入。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。