详细解答

STEP II 2016，第 4 题

纯数学 · 有理函数的值域

> **STEP II 2016，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q4

关键思路

去分母后，y 的定义便化为一条关于 x 的二次方程（quadratic equation），而“x 是实数”就变成“判别式（discriminant）非负”。要消去 θ，我们需要一个对所有 θ 都成立的 $y\cos\theta - \sin\theta$ 的上界（upper bound）；把它写成 $(y,-1)$ 与单位向量（unit vector）$(\cos\theta, \sin\theta)$ 的点积（dot product），便恰好得到 $\sqrt{y^2+1}$。在第 (ii) 部分，不等式链中的每一个不等式都必须取等号，而这正好把 x 和 θ 都确定下来。

解答

第 (i) 部分

首先留意分母永不为零：把 $x^2 + x\cos\theta + 1$ 看作 x 的二次式，其判别式为 $\cos^2\theta - 4 < 0$，所以它恒为正。因此可以放心地两边相乘：

$$y(x^2 + x\cos\theta + 1) = x^2 + x\sin\theta + 1 \iff (y-1)x^2 + (y\cos\theta - \sin\theta)\,x + (y-1) = 0.$$

若 $y \neq 1$，这是一条真正关于 x 的二次方程，而它有实根 x 当且仅当其判别式非负：

$$(y\cos\theta - \sin\theta)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0.$$

若 $y = 1$，所求的不等式变为 $(\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 0$，这本来就成立。所以对实数 x，

$$(y\cos\theta - \sin\theta)^2 \geq 4(y-1)^2,$$

即为所求。

想一想 怎样才能消去 θ？我们需要一个比 $(y\cos\theta-\sin\theta)^2$ 大、而又不依赖 θ 的式子。

式子 $y\cos\theta-\sin\theta$ 是 $(y,-1)$ 与单位向量 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 的纯量积（scalar product），所以其大小至多为 $|(y,-1)|=\sqrt{y^2+1}$。等价地，由柯西—施瓦茨不等式（Cauchy–Schwarz inequality），或直接由

$$(y^2+1)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-(y\cos\theta-\sin\theta)^2=(y\sin\theta+\cos\theta)^2\geq 0,$$

可得 $(y\cos\theta-\sin\theta)^2\leq y^2+1$。把这与第一个结果结合，

$$y^2+1\geq(y\cos\theta-\sin\theta)^2\geq 4(y-1)^2,$$

这就是第二个不等式。

展开得 $y^2+1\geq 4y^2-8y+4$，即

$$3y^2-8y+3\leq 0.$$

$3y^2-8y+3=0$ 的根为 $y=\dfrac{8\pm\sqrt{64-36}}{6}=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$，而由于这个二次式的首项系数（leading coefficient）为正，它恰好在两根之间取非正值。因此

$$\frac{4-\sqrt{7}}{3}\leq y\leq\frac{4+\sqrt{7}}{3}.$$

第 (ii) 部分

设 $y=\frac{1}{3}(4+\sqrt{7})$，则 $y-1=\frac{1}{3}(1+\sqrt{7})>0$。于是

$$y^2+1=\frac{16+8\sqrt{7}+7}{9}+1=\frac{32+8\sqrt{7}}{9},$$
$$4(y-1)^2=\frac{4(1+2\sqrt{7}+7)}{9}=\frac{32+8\sqrt{7}}{9}.$$

两者相等，而且 $2(y-1)>0$，所以取正平方根便得 $\sqrt{y^2+1}=2(y-1)$，即为所求。（这是理所当然的：y 是 $3y^2-8y+3=0$ 的根，而这条方程正是 $y^2+1=4(y-1)^2$。）

想一想 这个等式对第 (i) 部分的不等式链说明了甚么？

不等式链 $y^2+1\geq(y\cos\theta-\sin\theta)^2\geq 4(y-1)^2$ 的两端现在相等，所以两个不等式都取等号。

判别式为零，所以关于 x 的二次方程有重根（repeated root）

$$x=-\frac{y\cos\theta-\sin\theta}{2(y-1)}.$$

关于 θ 的上界被达到，所以 $y\sin\theta+\cos\theta=0$，从而

$$\tan\theta=-\frac{1}{y}=-\frac{3}{4+\sqrt{7}}=-\frac{3(4-\sqrt{7})}{16-7}=\frac{\sqrt{7}-4}{3}.$$

（此处 $\cos\theta\neq 0$，否则 $\sin\theta=0$ 亦成立，这是不可能的。）此外 $(y\cos\theta-\sin\theta)^2=y^2+1=4(y-1)^2$，所以 $y\cos\theta-\sin\theta=\pm 2(y-1)$，因此

$$x=\mp 1.$$

具体来说，$(\cos\theta,\sin\theta)$ 与 $(y,-1)$ 平行。若两者方向相同，即 $\cos\theta>0$ 且 $\sin\theta<0$，则 $y\cos\theta-\sin\theta=+2(y-1)$，$x=-1$。若两者方向相反，即 $\cos\theta<0$ 且 $\sin\theta>0$，则 $x=1$。两种情况下都有

$$x=\pm 1,\qquad \tan\theta=\frac{\sqrt{7}-4}{3}.$$

这两种情况其实是同一回事：把 x 换成 $-x$、θ 换成 $\theta+\pi$，y 的值不变。

验算

- 当 $x=1$ 时，公式为 $y=\dfrac{2+\sin\theta}{2+\cos\theta}$。取第二象限（quadrant）中满足 $\tan\theta=\frac{1}{3}(\sqrt{7}-4)\approx -0.4514$ 的 θ，得 $\theta\approx 2.7176$，于是 $y\approx 2.21525$，与 $\frac{1}{3}(4+\sqrt{7})\approx 2.21525$ 吻合。
- 用电脑随机抽取大量实数 x 和 θ，所得 y 值都落在 0.45142 与 2.21524 之间，刚好在界限 $\frac{1}{3}(4\mp\sqrt{7})\approx 0.451416$ 和 2.215250 之内。
- 一个值得留意的巧合：$\tan\theta=-\frac{1}{3}(4-\sqrt{7})$ 正是下界的相反数，因为两个界互为倒数（reciprocal）（它们的积是 $\frac{1}{9}(16-7)=1$）。

常见错误

- 忘记 $y=1$ 的情况：此时关于 x 的方程不是二次方程，判别式的论证不能直接套用。
- 取 $\sqrt{y^2+1}=-2(y-1)$，或没有检查正负号：这里取正根之所以正确，只是因为 $y>1$。
- 只给出一个 x 值；其实 $x=1$ 和 $x=-1$ 都会出现，对应的 θ 位于不同象限。

STEP 之外

步骤 $(y\cos\theta-\sin\theta)^2\leq(y^2+1)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$ 是柯西－施瓦茨不等式 $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|\leq|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$ 的二维情况，等号恰好在两向量平行时成立。这个不等式在所有内积空间（inner-product

space）中都成立，是大学一年级分析（analysis）与线性代数（linear algebra）中最常用的工具之一。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数导论）从几何角度发展这个不等式；Abbott 的 *Understanding Analysis*（理解分析）则展示它在分析中的应用。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。