详细解答

STEP II 2016，第 3 题

纯数学 · 多项式的根

> **STEP II 2016，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q3

关键思路

整道题建基于一条恒等式（identity）：$\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_{n-1}(x) + \dfrac{x^n}{n!}$。配合第 (i) 部分，它告诉我们：在 f_n 的根（root）a 处，斜率（gradient）为 $\mathrm{f}_n'(a) = -a^n/n!$。因此，即使不知道根是甚么，我们也知道每个根处的斜率。由于所有根的正负号相同，这些斜率的正负号亦全部相同；而一条曲线不可能连续两次向上穿过坐标轴，中间却没有一次向下穿过。

解答

全题中记 $\mathrm{f}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$。

第 (i) 部分

逐项微分（differentiating term by term），常数项 1 消失，而对 $1 \le k \le n$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^k}{k!}\right) = \frac{kx^{k-1}}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}.$$

所以

$$\mathrm{f}_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} = \mathrm{f}_{n-1}(x),$$

得证。

第 (ii) 部分

若 $x \geq 0$，则 $\mathrm{f}_n(x)$ 的每一项都非负，而首项是 1，所以 $\mathrm{f}_n(x) \geq 1 > 0$。因此没有根能满足 $a \geq 0$，任何实根都有 $a < 0$。（当 $n = 0$ 时，$\mathrm{f}_0 = 1$ 根本没有根，与此一致。）

第 (iii) 部分

由定义，$\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_{n-1}(x) + \dfrac{x^n}{n!}$。若 $\mathrm{f}_n(a) = 0$，则由第 (i) 部分，

$$\mathrm{f}_n'(a) = \mathrm{f}_{n-1}(a) = \mathrm{f}_n(a) - \frac{a^n}{n!} = -\frac{a^n}{n!},$$

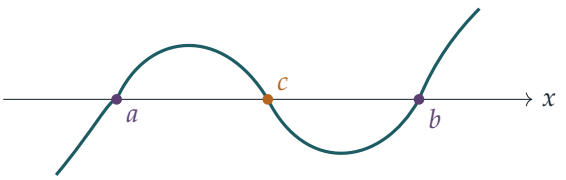
同理 $\mathrm{f}_n'(b) = -b^n/n!$。因此

$$\mathrm{f}_n'(a)\,\mathrm{f}_n'(b) = \frac{(ab)^n}{(n!)^2} > 0,$$

这是因为由第 (ii) 部分得 $a < 0$ 及 $b < 0$，所以 $ab > 0$。这正是所求的不等式。特别地，两个斜率都不为零，而且正负号相同。

> ? **想一想** 为甚么两个斜率正负号相同，就迫使两者之间必有另一个根?

设 $a < b$，并假设两个斜率皆为正（负的情况与之对称）。由于 $\mathrm{f}_n'(a) > 0$，曲线在 a 处向上穿过坐标轴，所以当 x 略大于 a 时 $\mathrm{f}_n(x) > 0$。由于 $\mathrm{f}_n'(b) > 0$，曲线在 b 处亦向上穿过坐标轴，所以当 x 略小于 b 时 $\mathrm{f}_n(x) < 0$。一个连续函数若在某点为正、在较后的一点为负，则必在两者之间取值零（介值定理（intermediate value theorem)），所以存在某个 c 满足 $a < c < b$ 且 $\mathrm{f}_n(c) = 0$。



曲线上升穿过 a，又上升穿过 b，所以在两者之间某处必定向下穿过坐标轴。

*最多只有一个实根。*假设 $(*)$ 有两个或以上相异的实根。它是 n 次多项式（polynomial)，所以只有有限个根，我们可以从中选出两个*相邻*（consecutive）的根 $a < b$，即两者之间严格地没有其他根。但上面的论证在 a 与 b 之间严格地找到一个根 c，矛盾。所以 $(*)$ 最多只有一个实根。（论证按题目所设使用了 $n \geq 2$；当 $n = 1$ 时唯一的根是 -1，当 $n = 0$ 时没有根，所以结论对每个 n 都成立。）

*n 为奇数。*此时 f_n 的次数为奇数，首项系数（leading coefficient）$1/n!$ 为正，所以当 $x \to -\infty$ 时 $\mathrm{f}_n(x) \to -\infty$，当 $x \to +\infty$ 时 $\mathrm{f}_n(x) \to +\infty$。由介值定理，它最少有一个实根，因此**恰好有一个**。

n 为偶数。当 $n = 0$ 时没有根。对偶数 $n \geq 2$，当 $x \to \pm\infty$ 时 $\mathrm{f}_n(x) \to +\infty$，所以 f_n 在某点 x_0 取得全域最小值（global minimum），而该处 $\mathrm{f}_n'(x_0) = \mathrm{f}_{n-1}(x_0) = 0$。由于 $\mathrm{f}_{n-1}(0) = 1 \neq 0$，故 $x_0 \neq 0$，于是

$$\mathrm{f}_n(x_0) = \mathrm{f}_{n-1}(x_0) + \frac{x_0^n}{n!} = \frac{x_0^n}{n!} > 0,$$

因为 n 是偶数。最小值为正，所以对所有 x 都有 $\mathrm{f}_n(x) > 0$，$(*)$ **没有实根**。

（另一方法：由于 $\mathrm{f}_n'(a) \neq 0$，任何根 a 都会是单根（simple root），所以 f_n 在该处会变号；但一个首项系数为正的偶次多项式若恰好只变号一次，则它对所有很大的 x 或对所有很负的 x 必为负，这是不可能的。）

验算

- $n = 1$：$1 + x = 0$ 只有一个根 -1。$n = 2$：$1 + x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\big((x+1)^2 + 1\big) > 0$，没有根。两者皆吻合。
- $n = 3$：根约为 -1.596，而该处 $\mathrm{f}_3'(a) = \mathrm{f}_2(a) \approx 0.678 = -a^3/3!$，与预测相符。
- 用电脑检查 f_n 对每个 $n \leq 25$ 的变号情况，发现 n 为奇数时恰有一个根，n 为偶数时没有根。

常见错误

- 证明斜率之积为正时，没有说明为甚么 $ab > 0$：这需要用到第 (ii) 部分。
- 由“任意两根之间必有一根”推出“最多只有一个根”，却没有选取两个相邻的根；正是这个选取才导致矛盾。
- n 为偶数时，忘记检查 $x_0 \neq 0$，而这是 $x_0^n/n! > 0$ 严格成立所必需的。

STEP 之外

多项式 f_n 是 e^x 的泰勒多项式（Taylor polynomials），而第 (i) 部分正是 $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ 在有限情况下的影子。由于 e^x 永不为零，f_n 只有很少实根也就顺理成章；它们的复数根（complex roots）按 $1/n$ 缩放后，当 $n \to \infty$ 时会聚集在一条称为塞格曲线（Szegő curve）的曲线上。这里用到的工具——介值定理，以及连续函数必有最小值——会在第一门分析（analysis）课程中严谨地证明；可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。