详细解答

STEP II 2016，第 2 题

纯数学 · 因式定理

> **STEP II 2016，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/16-s2-q2

关键思路

把 $(*)$ 看成以 c 为变量的多项式（polynomial），其系数（coefficients）恰好涉及 a 和 b。因式定理（factor theorem）指出：$c-(a+b)$ 是因式（factor），当且仅当代入 $c=a+b$ 后结果为零。一旦找到一个因式，$(*)$ 对 a、b、c 的对称性（symmetry）便免费送上另外两个，再数一数次数（degree），因式分解（factorisation）就完成了。之后的两条方程其实是经过伪装的特殊情况：要做的就是选取 a、b、c（以及后来的 d、e）来配合它们。

解答

因式 $a+b-c$

记 $(*)$ 为 $F(a,b,c)$。视之为 c 的多项式，F 有因式 $c-(a+b)$（因而亦有因式 $a+b-c$），当且仅当 $F(a,b,a+b)=0$。设 $p=a+b$ 及 $c=p$。那么 $a+b+c=2p$，并利用 $a^2+b^2=p^2-2ab$ 和 $a^3+b^3=p^3-3abp$，得

$$a^2+b^2+c^2=2p^2-2ab, \qquad a^3+b^3+c^3=2p^3-3abp.$$

所以

$$\begin{aligned} F(a,b,a+b) &= 8p^3-6(2p)(2p^2-2ab)+8(2p^3-3abp) \\ &= 8p^3-24p^3+24abp+16p^3-24abp=0, \end{aligned}$$

因此 $a+b-c$ 是 $(*)$ 的因式，正如所求。

将 $(*)$ 完全因式分解

无论怎样重新排列 a、b、c，F 都不变。交换 b 与 c，因式 $a+b-c$ 变成 $a+c-b$；交换 a 与 c，它变成 $b+c-a$。所以以下三者

$$a+b-c, \qquad b+c-a, \qquad c+a-b$$

都是因式。它们是互不相同的线性（linear）多项式，没有一个是另一个的常数倍，所以它们的乘积整除 F。F 的每一项次数都是 3，所以余下的因式次数为 0：它是一个常数 k，而

$$F(a,b,c) = k(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

为求 k，设 $a=b=c=1$：左方为 $27-6\cdot 3\cdot 3+8\cdot 3=-3$，而乘积为 1。因此 $k=-3$，且

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3-6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+8(a^3+b^3+c^3)\\ = -3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).\end{aligned}$$

第 (i) 部分

把方程的中间项和最后一项除开，化成 $(*)$ 的形式：

$$(x+1)^3-6(x+1)\left(x^2+\tfrac{5}{2}\right)+8\left(x^3+\tfrac{13}{4}\right)=0.$$

想一想 a、b、c 取甚么值，才能令这式子恰好就是 $(*)$?

试取 $a=x$，而 b、c 为常数。我们需要

$$b+c=1, \qquad b^2+c^2=\tfrac{5}{2}, \qquad b^3+c^3=\tfrac{13}{4}.$$

由前两式得 $2bc=(b+c)^2-(b^2+c^2)=-\tfrac{3}{2}$，所以 $bc=-\tfrac{3}{4}$。于是

$$b^3+c^3=(b+c)^3-3bc(b+c)=1+\tfrac{9}{4}=\tfrac{13}{4},$$

所以第三个条件自动成立。现在 b、c 是 $t^2-t-\tfrac{3}{4}=0$ 的根，即 $(2t-3)(2t+1)=0$，所以 $b=\tfrac{3}{2}$，$c=-\tfrac{1}{2}$。

取 $a=x$、$b=\tfrac{3}{2}$、$c=-\tfrac{1}{2}$，因式分解给出

$$a+b-c=x+2, \qquad b+c-a=1-x, \qquad c+a-b=x-2,$$

所以方程为 $-3(x+2)(1-x)(x-2)=0$，而

$$x=-2, \quad x=1, \quad x=2.$$

第 (ii) 部分

记该四变量表达式为 $G(a,b,d,e)$。(设 $c=d+e$, 则 $a+b-d-e$ 看起来就像 $a+b-c$, 由此可猜到这个因式; 不过直接验证也一样快。) 根据因式定理, 把 G 视为 e 的多项式, 只需证明当 $a+b=d+e$ 时 $G=0$。设 $p=a+b=d+e$。与之前完全一样, $a^2+b^2=p^2-2ab$、$d^2+e^2=p^2-2de$、$a^3+b^3=p^3-3abp$ 及 $d^3+e^3=p^3-3dep$, 所以设 $q=ab+de$, 得

$$\begin{aligned} G &= (2p)^3-6(2p)(2p^2-2q)+8(2p^3-3pq)\\ &= 8p^3-24p^3+24pq+16p^3-24pq=0. \end{aligned}$$

所以 $a+b-d-e$ 是 G 的因式。

无论怎样重新排列 a、b、d、e, G 都不变。因式 $a+b-d-e$ 来自把四个字母分成 $\{a,b\}$ 和 $\{d,e\}$ 两对; 另外两种配对方法给出因式

$$a+d-b-e \quad (\text{交换}b,d), \qquad a+e-b-d \quad (\text{交换}b,e).$$

这三个线性因式互不相同, 没有一个是另一个的倍数, 而 G 是 3 次齐次 (homogeneous) 多项式, 所以对某常数 k, 有 $G=k(a+b-d-e)(a+d-b-e)(a+e-b-d)$。设 $a=1$、$b=d=e=0$, 左方得 $1-6+8=3$, 右方得 k, 所以

$$G=3(a+b-d-e)(a+d-b-e)(a+e-b-d).$$

至于方程, 取 $a=x$, 并取常数 b、d、e 使得

$$b+d+e=6, \qquad b^2+d^2+e^2=14, \qquad b^3+d^3+e^3=36.$$

数字 1、2、3 符合要求: $1+2+3=6$, $1+4+9=14$, $1+8+27=36$。所以取 $a=x$、$b=1$、$d=2$、$e=3$, 方程恰好就是 $G=0$, 其因式分解为

$$3(x+1-2-3)(x+2-1-3)(x+3-1-2)=3(x-4)(x-2)x=0.$$

因此

$$x=0, \quad x=2, \quad x=4.$$

验算

- 把 $a=b=1$、$c=2$ 代入 $(*)$: $64-6\cdot4\cdot6+8\cdot10=0$, 正如因式 $a+b-c$ 所预示。
- 在 (i) 中, $x=1$ 给出 $8-3\cdot2\cdot7+2\cdot17=8-42+34=0$。
- 在 (ii) 中, $x=0$ 给出 $216-6\cdot6\cdot14+8\cdot36=216-504+288=0$, 而 $x=4$ 给出 $1000-6\cdot10\cdot30+8\cdot100=0$。
- 这些因式分解亦已用电脑在变量取几千个随机有理数值时验证过。

常见错误

- 忘记常数：$(*)$ 是各因式乘积的 -3 倍，而不是乘积本身。务必用方便的代入来确定 k。
- 在 (ii) 中列出多于三个因式。例如交换 a 与 d，得到 $d+b-a-e$，这不过是 $-(a+e-b-d)$；三个真正不同的因式来自把四个字母两两配对的三种方法。
- 用蛮力把所有东西展开。这样做行得通，但又长又容易出错；把方程与恒等式配对才是这道题的重点。

STEP 之外

因式定理在任何域（field）上都成立；这里我们把除一个以外的所有变量视为常数，从而把它用于多变量多项式。对称性加上多项式的唯一因式分解（unique factorisation）是威力强大的组合：对称多项式（symmetric polynomials）的理论指出，每个对称多项式都可以用基本对称多项式（elementary symmetric polynomials）$a+b+c$、$ab+bc+ca$、abc 表示，这正是 (i) 中关于 b、c 的条件背后隐藏的结构。顺带一提，乘积 $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ 正是三角形面积的海伦公式（Heron's formula）中出现的式子。想进一步了解多项式环（polynomial rings）与因式分解，可参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。