详细解答

STEP II 2016，第 13 题

概率与统计 • 正态近似

STEP II 2016，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s2-q13

本题在 *Beyond STEP* 第 12.23 节由概率得出斯特灵公式中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/stirling-probability.html

关键思路

离散分布（discrete distribution）的单一概率 $\mathrm{P}(X = k)$，是一条以 k 为中心、宽度为 1 的长条的面积。若该分布接近正态分布（normal distribution），这个面积大约等于 k 处的正态概率密度（density）乘以宽度 1。在平均值（mean）处应用这一点（标准正态分布在该处的密度为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$），便能把一个已知的精确概率化为一个近似式。只要巧妙地选取分布，就能令精确概率包含我们想要的阶乘（factorial）。

解答

全题通用的近似

设 W 取整数值，平均值为 μ，方差（variance）为 σ^2，并且可用 $V \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ 很好地近似。V 的概率密度为

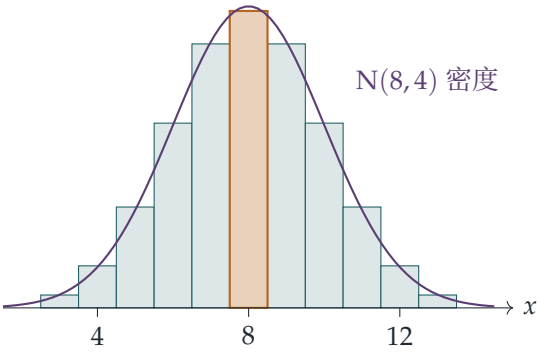
$$f(v) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

加上连续性校正（continuity correction），

$$\mathrm{P}(W = k) \approx \mathrm{P}\left(k - \tfrac{1}{2} < V < k + \tfrac{1}{2}\right) = \int_{k-1/2}^{k+1/2} f(v)\,\mathrm{d}v \approx 1 \times f(k),$$

最后一步成立，是因为区间宽度为 1，而当 σ 不太小时，f 在区间上几乎不变。在 $k=\mu$ 处，指数部分为 $\mathrm{e}^0=1$，所以

$$\mathrm{P}(W=\mu)\approx\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}. \qquad (*)$$



第 (i) 部分

对于 $X\sim\mathrm{B}(16,\frac{1}{2})$，

$$\mathrm{E}(X)=np=8,\qquad \mathrm{Var}(X)=np(1-p)=16\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}=4,$$

所以 $\sigma=2$。由于 $p=\frac{1}{2}$，分布关于 8 对称，而且 n 相当大，因此 $\mathrm{N}(8,4)$ 是很好的近似（图中把各长条与正态曲线作了比较）。由 $(*)$，阴影长条的面积为

$$\mathrm{P}(X=8)\approx\frac{1}{2\sqrt{2\pi}},$$

即为所求。

第 (ii) 部分

设 $Y\sim\mathrm{B}(2n,\frac{1}{2})$。则 $\mathrm{E}(Y)=n$，$\mathrm{Var}(Y)=2n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$，所以 $\sigma=\sqrt{n/2}$。精确地，

$$\mathrm{P}(Y=n)=\binom{2n}{n}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n=\frac{(2n)!}{(n!)^2\,2^{2n}}.$$

当 n 很大时，正态近似适用，由 $(*)$ 得

$$\mathrm{P}(Y=n)\approx\frac{1}{\sqrt{n/2}\,\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

令两个表达式相等，再乘以 $2^{2n}(n!)^2$：

$$(2n)!\approx\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n\pi}},$$

这正是所求的结果。（第 (i) 部分就是 $n=8$ 的情况：$\sqrt{8\pi}=2\sqrt{2\pi}$。）

第 (iii) 部分

设 $Z \sim \mathrm{Po}(n)$，于是 $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{Var}(Z) = n$，$\sigma = \sqrt{n}$。精确地，

$$\mathrm{P}(Z = n) = \frac{\mathrm{e}^{-n} n^n}{n!}.$$

想一想 为甚么这里可以用正态分布来近似泊松分布（Poisson distribution）？

一个 $\mathrm{Po}(n)$ 随机变量与 n 个独立的 $\mathrm{Po}(1)$ 随机变量之和同分布，所以由中心极限定理（central limit theorem），当 n 很大时，它近似服从 $\mathrm{N}(n, n)$。这就是“当 λ 很大时 $\mathrm{Po}(\lambda) \approx \mathrm{N}(\lambda, \lambda)$”这条标准法则。

因此由 $(*)$，

$$\frac{\mathrm{e}^{-n} n^n}{n!} \approx \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

整理后得

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, \mathrm{e}^{-n} n^n,$$

即为所求。

验算

- 第 (i) 部分：精确值为 $\mathrm{P}(X = 8) = \binom{16}{8}/2^{16} = 12870/65536 \approx 0.1964$，而 $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \approx 0.1995$，相差约 1.6% 以内。
- 第 (ii) 部分取 $n = 10$：$\binom{20}{10}/2^{20} \approx 0.1762$，对比 $1/\sqrt{10\pi} \approx 0.1784$。随着 n 增大，阶乘近似式两边之比趋向 1（在 $n = 100$ 时约为 0.9988）。
- 第 (iii) 部分取 $n = 10$：$10! = 3\,628\,800$，而 $\sqrt{20\pi}\,\mathrm{e}^{-10}\,10^{10} \approx 3\,598\,696$，偏小不足 1%。
- 一致性：把 (iii) 的结果同时代入 (ii) 中的 $(2n)!$ 和 $n!$，两边都得到 $\sqrt{4\pi n}\,\mathrm{e}^{-2n}(2n)^{2n}$，所以两个近似式互相吻合。

常见错误

- 直接使用标准正态密度 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 而没有除以 σ。$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ 在平均值处的密度是 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$。
- 在第 (ii) 部分中把标准差（standard deviation）误用为 $\frac{n}{2}$ 而不是 $\sqrt{n/2}$，或把 $\mathrm{B}(2n, \frac{1}{2})$ 的方差算错。
- 在第 (iii) 部分中忘记说明为甚么泊松分布可以用正态分布近似。

STEP 之外

第 (iii) 部分的结果就是斯特林公式（Stirling's formula），而上述论证是中心极限定理在单一点上应用的一种启发式（heuristic）形式，即所谓“局部极限定理”（local limit theorem）。要把它严格化需要小心：知道一个分布函数接近正态分布函数，本身并不能推出个别概率接近密度。斯特林公式也可以直接证明，例如把 $\ln n! = \sum \ln k$ 与 $\int \ln x \, \mathrm{d}x$ 作比较，或从伽玛函数（gamma function）出发，运用拉普拉斯（Laplace）方法。Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率导论》）讲解了中心极限定理及泊松分布与正态分布之间的联系；Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率入门》）是很好的辅助读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。