详细解答

STEP II 2016，第 12 题

概率与统计 • 容斥原理与错排

STEP II 2016，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s2-q12

本题在 *Beyond STEP* 第 9.8 节没有人拿到自己的恤衫中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/derangements.html

关键思路

对于三个事件（event），把 $A \cup B$ 看作单一事件，然后两次运用两个事件的公式。同样的正负交替规律（加上单个事件、减去两两之交、加上三个之交，...）对任意数目的事件都成立。把这规律应用于“第 i 张卡在第 i 个位置”这些事件时，每个由 r 个事件组成的项都有相同的概率，所以和式的每一层都会化简成一个分数。至于“恰好一个”，先固定哪一张卡是配对的那张，再要求其余的卡完全没有配对。

解答

三个事件

写成 $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$，然后以 $A \cup B$ 代替 A、以 C 代替 B，运用两个事件的公式：

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A \cup B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}\big((A \cup B) \cap C\big).$$

第一项是 $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$。至于最后一项，由分配律（distributive law）得 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$，再运用一次两个事件的公式，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) &= \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}\big((A \cap C) \cap (B \cap C)\big) \\ &= \mathrm{P}(A \cap C) + \mathrm{P}(B \cap C) - \mathrm{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

把两者代入，

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(C\cap A)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C),$$

得证。

四个事件

加上四个单一事件的概率，减去六个两两交集（intersection）的概率，加上四个三重交集的概率，再减去四重交集的概率：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B\cup C\cup D)=\;&\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)+\mathrm{P}(D)\\&-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap C)-\mathrm{P}(A\cap D)\\&-\mathrm{P}(B\cap C)-\mathrm{P}(B\cap D)-\mathrm{P}(C\cap D)\\&+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)+\mathrm{P}(A\cap B\cap D)+\mathrm{P}(A\cap C\cap D)+\mathrm{P}(B\cap C\cap D)\\&-\mathrm{P}(A\cap B\cap C\cap D).\end{aligned}$$

第 (i)–(iii) 部分

全部 $n!$ 种排列的可能性相等。若要求某 r 张指定的卡各自在自己的位置上，余下的 $n-r$ 张卡可以有 $(n-r)!$ 种排法，所以概率是 $(n-r)!/n!$。因此

$$\text{(i) }\mathrm{P}(E_i)=\frac{1}{n},\qquad \text{(ii) }\mathrm{P}(E_i\cap E_j)=\frac{1}{n(n-1)},\qquad \text{(iii) }\mathrm{P}(E_i\cap E_j\cap E_k)=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}.$$

（第 (ii) 部分亦可这样看：第 i 张卡落在第 i 个位置的概率是 $\frac{1}{n}$，然后第 j 张卡在余下的 $n-1$ 个位置中落在第 j 个位置的概率是 $\frac{1}{n-1}$。）

至少一个配对

至少有一张卡配对，正正就是 $E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n$ 发生。上述规律可推广至 n 个事件：第 r 层是 $(-1)^{r+1}$ 乘以所有由 r 个不同事件组成的交集的概率之和。

> **想一想** 在不知道是哪些事件的情况下，怎样计算一个遍及所有 r 个事件选法的和？

由对称性（symmetry），每个由 r 个不同事件组成的交集都有相同的概率 $(n-r)!/n!$，而选出 r 个事件的方法有 $\binom{n}{r}$ 种。所以第 r 层贡献

$$(-1)^{r+1}\binom{n}{r}\frac{(n-r)!}{n!}=(-1)^{r+1}\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\cdot\frac{(n-r)!}{n!}=\frac{(-1)^{r+1}}{r!}.$$

对 $r=1,2,\ldots,n$ 求和，

$$\mathrm{P}(\text{至少一个配对})=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!},$$

得证。（当 $r = 1, 2, 3$ 时，这不过是第 (i)–(iii) 部分得出的 $n \cdot \frac{1}{n}$、$\binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n(n-1)}$ 和 $\binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$。）

恰好一个配对

以 p_m 表示 m 张洗乱了的卡中没有任何一张在自己位置上的概率。由上一个结果，

$$p_m = 1 - \left(1 - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{m+1}\frac{1}{m!}\right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^m \frac{1}{m!}.$$

“恰好一个配对”这事件是各事件“第 i 张卡配对而其他卡都不配对”对 i 的不相交并集（disjoint union）。在 E_i 发生的条件下，其余 $n-1$ 张卡在其余 $n-1$ 个位置上的任何排列都有相等的可能性，所以这等同于重新洗一副 $n-1$ 张的卡，而其中没有任何一张配对的概率是 p_{n-1}。因此

$$\mathrm{P}(\text{恰好一个配对}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(E_i)\, p_{n-1} = n \cdot \frac{1}{n} \cdot p_{n-1} = p_{n-1},$$

即是

$$\mathrm{P}(\text{恰好一个配对}) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!} \qquad (n \geq 2),$$

而当 $n = 1$ 时概率为 1。等价地，它等于 $\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r/r!$，这个写法连 $n = 1$ 的情况也包括在内。

验算

当 $n = 3$ 时，排列有 123、132、213、231、312、321。其中四个有配对，得 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$；而三个（即对换 132、213、321）恰好有一个配对，得 $\frac{1}{2}$，与公式相符。当 $n = 2$ 时，恰好一个配对是不可能的（若一张卡在其位置上，另一张也必然如此），而公式给出 0。以电脑列举 $n \leq 7$ 的所有排列，结果与两条公式都相符；例如当 $n = 7$ 时，恰好一个配对的概率是 $\frac{53}{144} \approx 0.368$。当 $n \to \infty$ 时，两个答案都趋向熟悉的极限：至少一个配对趋向 $1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0.632$，而恰好一个配对趋向 e^{-1}。

常见错误

- 写成 $\mathrm{P}(E_i \cap E_j) = \frac{1}{n^2}$：这些事件并不独立（independent），因为一旦第 i 张卡在第 i 个位置，第 j 张卡便只剩下 $n-1$ 个位置。
- 把“恰好一个”答成 $n \cdot \frac{1}{n} = 1$ 或 $\mathrm{P}(E_1)$：我们需要第 i 张卡在其位置上，*而且*没有其他卡在其位置上。
- 忘记“至少一个”的和式中 $r = 1$ 的项是 $n \cdot \frac{1}{n} = 1$，这正是级数以 1 开始的原因。

STEP 之外

这是经典的错排（derangement）问题（即 *problème des rencontres*，“配对问题”），而一般的容斥（inclusion–exclusion）公式可以用归纳法（induction）或指示随机变量（indicator random variables）简洁地证明。原来当 n 很大时，配对的数目近似服从平均值为 1 的泊松分布（Poisson distribution）：恰好有 k 个配对的概率趋向 $\mathrm{e}^{-1}/k!$。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》），以及 Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率导论》），都有讨论容斥原理和配对问题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。