详细解答

STEP II 2016，第 11 题

力学 • 抛体的碰撞

STEP II 2016，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s2-q11

关键思路

两个质点碰撞（collide），即是在同一时刻两个坐标都相等，因此我们得到两条共用同一个未知数 t 的方程；把其中一条除以另一条，便可消去 t。第 (ii) 部分的窍门在于留意到：在每一瞬间，重力把子弹和靶子往下拉的距离完全相同，都是 $\frac{1}{2}gt^2$。所以两者能否相遇，取决于第 (i) 部分那种没有重力的运动；重力只在问“相遇时靶子在哪里”时才有关系。

解答

第 (i) 部分

把第一个质点记作 P（从 $(a,0)$ 出发），第二个记作 Q（从 $(0,b)$ 出发）。设两者在时刻 t 碰撞。令 x 坐标和 y 坐标分别相等，

$$\begin{aligned} a + ut\cos\alpha &= vt\cos\beta, & \text{所以}\quad t(v\cos\beta - u\cos\alpha) &= a,\\ ut\sin\alpha &= b + vt\sin\beta, & \text{所以}\quad t(u\sin\alpha - v\sin\beta) &= b. \end{aligned}$$

由于 $a > 0$，第一条方程显示 $t \neq 0$（两个质点从不同的点出发），因此 $t > 0$，我们可以把第二条方程除以第一条：

$$\frac{u\sin\alpha - v\sin\beta}{v\cos\beta - u\cos\alpha} = \frac{b}{a} = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

（分母等于 $a/t \neq 0$。）交叉相乘，

$$\cos\theta\,(u\sin\alpha - v\sin\beta) = \sin\theta\,(v\cos\beta - u\cos\alpha),$$

再把含 u 的项移到左边、含 v 的项移到右边，

$$u(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) = v(\sin\beta\cos\theta + \cos\beta\sin\theta).$$

由 $\sin(A+B)$ 的复角公式（compound-angle formula），上式即是

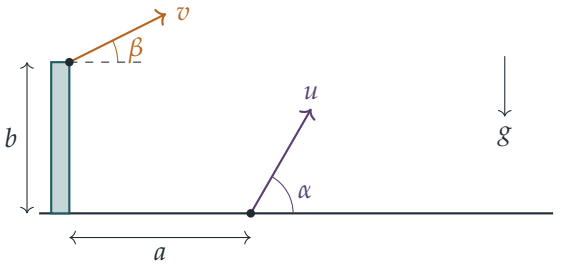
$$u\sin(\theta+\alpha) = v\sin(\theta+\beta),$$

此即所求。我们另外记下两个稍后会用到的事实：由于 $a, b, t > 0$，

$$v\cos\beta > u\cos\alpha \qquad 及 \qquad u\sin\alpha > v\sin\beta. \tag{$*$}$$

第 (ii) 部分

把子弹和靶子视为只受重力作用、自由运动的质点，不计空气阻力（air resistance）。取塔底为原点，x 轴为通过靶子发射点的水平线（方向为远离塔的一方），y 轴铅直向上。子弹必须朝靶子的方向发射才有可能命中，所以两者都在这个铅直平面内运动。



在时刻 t（两者落地之前），靶子和子弹的位置分别是

$$T = (a + ut\cos\alpha,\ ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2), \qquad B = (vt\cos\beta,\ b + vt\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2).$$

这恰好是第 (i) 部分中的位置，各自向下平移了相同的距离 $\frac{1}{2}gt^2$。

> ? **想一想** 第 (i) 部分没有重力，为甚么我们仍可以用第 (i) 部分的结果?

命中发生在 $T = B$ 的时候。在 y 方程中，$-\frac{1}{2}gt^2$ 这一项同时出现在两边，可以互相抵消，所以碰撞条件与第 (i) 部分一字不差：

$$t(v\cos\beta - u\cos\alpha) = a, \qquad t(u\sin\alpha - v\sin\beta) = b.$$

特别地，第 (i) 部分及 $(*)$ 都适用，而命中的时刻是

$$t = \frac{b}{u\sin\alpha - v\sin\beta},$$

其中由 $(*)$ 知分母为正。

此刻靶子仍在空中，当且仅当它的高度为正：

$$ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2 > 0 \iff t < \frac{2u\sin\alpha}{g},$$

这里除以了 $\frac{1}{2}t > 0$。代入命中的时刻，

$$\frac{b}{u\sin\alpha - v\sin\beta} < \frac{2u\sin\alpha}{g}.$$

两个分母都是正数，所以两边同乘 $g(u\sin\alpha - v\sin\beta)$ 不会改变不等式（inequality）的方向，于是得到

$$2u\sin\alpha\,(u\sin\alpha - v\sin\beta) > bg,$$

此即所求。（命中时子弹与靶子处于同一高度，所以子弹也在地面之上。）

为甚么需要 $\alpha > \beta$

我们已经看到，要命中，两个质点必须按第 (i) 部分的意义碰撞，所以

$$u\sin(\theta+\alpha) = v\sin(\theta+\beta),$$

其中 $\tan\theta = b/a$；而且由 $(*)$，还有 $u\sin\alpha > v\sin\beta$。这里四个正弦值都是正数，因为 θ、α、β 都是锐角，所以 $\theta+\alpha$ 和 $\theta+\beta$ 严格介乎 0 与 π 之间。把等式除以这个不等式，不等号方向会倒转：

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin\alpha} < \frac{\sin(\theta+\beta)}{\sin\beta}.$$

展开得 $\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\sin\alpha} = \sin\theta\cot\alpha + \cos\theta$，$\beta$ 的情况同理，所以

$$\sin\theta\cot\alpha < \sin\theta\cot\beta \iff \cot\alpha < \cot\beta,$$

因为 $\sin\theta > 0$。在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上余切函数（cotangent）严格递减（strictly decreasing），所以 $\alpha > \beta$。

从物理角度看：相对于子弹，靶子以恒定速度沿直线运动，因为重力已经抵消了。这个相对速度（relative velocity）必须由靶子的起点 $(a,0)$ 指向位于 $(0,b)$ 的枪，所以它必须指向后方及上方；由 $(*)$，靶子在水平方向必须比子弹慢，在铅直方向却比子弹快，这迫使它的路径较陡，即 $\tan\alpha > \tan\beta$。（把 $(*)$ 的两部分相除，也可以直接得到同一结论。）

验算

试取 $u = 20$、$\alpha = 60°$、$v = 15$、$\beta = 30°$，并设在 $t = 1$ 时命中，$g = 9.8$。碰撞方程给出 $a \approx 2.990$ 及 $b \approx 9.821$，所以 $\theta \approx 73.06°$。于是 $u\sin(\theta+\alpha) \approx 14.612$，而 $v\sin(\theta+\beta) \approx 14.612$，两者吻合。命中时靶子的高度为 $17.32 - 4.9 \approx 12.42 > 0$，而确实 $2u\sin\alpha(u\sin\alpha - v\sin\beta) \approx 340.2 > bg \approx 96.2$。我们用电脑检验了数以千计的随机发射情况，证实该不等式成立当且仅当命中时靶子仍在空中，而且每一次命中都有 $\alpha > \beta$。

常见错误

- 忘记两个质点必须在同一时刻处于同一位置，结果解出两个不同的时刻。
- 未先确定 $u\sin\alpha - v\sin\beta$ 为正，便把两边同乘以它；它确实为正，因为 $t > 0$ 且 $b > 0$。
- 单凭 $u\sin\alpha > v\sin\beta$ 推出 $\alpha > \beta$；除非同时比较速率，否则这条不等式对角度毫无启示。

STEP 之外

重力互相抵消，是伽利略相对性（Galilean relativity）的一个例子：在随子弹一同自由下落的参考系中，靶子以恒定速度沿直线运动，所以“直接瞄准它”就行。这正是经典的“猴子与猎人”（monkey and hunter）示范实验；而惯性参考系（inertial frame）（或自由下落参考系）的概念，是大学一年级力学的起点，日后亦是广义相对论（general relativity）中等效原理（equivalence principle）的起点。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对相对运动和参考系有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。