详细解答

STEP II 2016，第 10 题

力学 · 摩擦力与平衡

STEP II 2016，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s2-q10

关键思路

作用在三角形上的只有两个力：作用于质心（centre of mass）G 的重量，以及钉在接触点 P 给予的单一接触力（contact force）。两个力处于平衡（equilibrium）时，必须大小相等、方向相反，并且作用在同一直线上，所以三角形会摆动，直至 G 位于 P 的正下方。于是问题变成：钉的反作用力要偏离 BC 的法线多少，而摩擦力（friction）是否足以承受？因此第一步是找出 G 的位置。

解答

模型与质心

把金属线视为三根单位长度质量相同的均匀杆（uniform rod），并把钉视为单一接触点，提供一个法向反作用力（normal reaction）R（垂直于 BC）和一个摩擦力 F（沿 BC），且 $F \le \mu R$。

设 $AB = AC = b$，并设 M 为 BC 的中点。由于 A 处的角是 2θ，直线 AM 平分此角并垂直于 BC，所以

$$BM = MC = b\sin\theta, \qquad AM = b\cos\theta, \qquad BC = 2b\sin\theta.$$

由对称性，G 位于 AM 上。从 BC 向 A 的方向量度距离。杆 AB 和 AC 的质量各与 b 成正比，其中心位于各自的中点，与 BC 的距离为 $\frac{1}{2}b\cos\theta$；杆 BC 的质量与 $2b\sin\theta$ 成正比，其中心位于 BC 上。所以距离 $d = GM$ 为

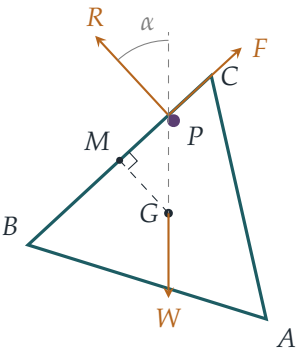
$$d = \frac{b\cdot\frac{1}{2}b\cos\theta + b\cdot\frac{1}{2}b\cos\theta + 2b\sin\theta\cdot 0}{b+b+2b\sin\theta} = \frac{b\cos\theta}{2(1+\sin\theta)}.$$

钉位于一般位置时的平衡

假设钉在 P 点接触 BC，其中 $MP = x$，且 $0 \le x \le b\sin\theta$（由对称性，可取 P 位于 M 与 C 之间）。三角形悬挂在钉的下方，所以钉位于三角形内部，而 BC 搁在钉上。

想一想 三角形可以以任何角度悬挂。我们怎样知道它会取哪一个角度?

作用在三角形上的力是作用于 G 的重量 W，以及钉在 P 的总接触力。只有两个力时，平衡要求它们大小相等、方向相反（所以接触力是铅直向上的 W），并且作用在同一直线上（否则它们会构成一个力偶（couple））。所以 PG 必须是铅直的：三角形会稳定在 G 位于 P 正下方的位置。



设 α 为 PG（铅直线）与 BC 的法线 GM 之间的夹角。在直角三角形 PMG 中，

$$\tan\alpha = \frac{MP}{GM} = \frac{x}{d}.$$

BC 的法线与铅直线成 α 角，而 BC 与水平线成 α 角。沿垂直于 BC 及沿 BC 的方向分解（resolve）：

$$R = W\cos\alpha, \qquad F = W\sin\alpha.$$

由于 $0 \le \alpha < \frac{1}{2}\pi$，两者皆非负，且 $R > 0$。只要 $F \le \mu R$，三角形便能保持不动而不滑动，即

$$\mu \ge \tan\alpha = \frac{x}{d}.$$

BC 上的每一点

右方的 x/d 随 x 递增，所以当 P 位于端点，即 $x = b\sin\theta$ 时，条件最难满足。当且仅当在该处可以平衡时，在 BC 上每一点都可以平衡：

$$\mu \ge \frac{b\sin\theta}{d} = b\sin\theta \cdot \frac{2(1+\sin\theta)}{b\cos\theta} = 2\tan\theta\,(1+\sin\theta),$$

这就是所求的条件。若此条件成立，则对 $[0, b\sin\theta]$ 中每一个 x 都有 $\mu \ge x/d$，所以无论钉位于 BC 上哪一点，三角形都可以静止。

验算

- 当 $x = 0$（钉位于 M）时，得 $\alpha = 0$：三角形悬挂时 BC 保持水平，完全不需要摩擦力，正如对称性所预期。
- 当 $\theta = 30°$ 时，三角形是等边三角形，$d = \frac{1}{3}b\cos 30°$，而 G 应为形心（centroid），即从 BC 沿高 $b\cos 30°$ 向上三分之一处。结果确实如此。条件变成 $\mu \geq 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{3} \approx 1.732$：在角位时，$BC$ 须与水平线成 $60°$。
- 当 $\theta \to 0$ 时，三角形变成一根细长的尖刺，BC 缩小至零，界限趋于 0；当 $\theta \to \frac{1}{2}\pi$ 时，三角形变成一条又长又扁的窄条，界限趋于无穷大。两者都符合直觉。
- 以电脑验算：把三根杆分割成许多小段来求 G，并对随机的 θ 和 b 在 BC 上 201 个点分解力，结果与 $2\tan\theta(1 + \sin\theta)$ 的差在 10^{-11} 以内。

常见错误

- 用了三角形薄板（lamina）的形心（AM 向上三分之一处），而不是金属线的质心。金属线框的质量分布在三边上，所以 BC 的权重是 $2b\sin\theta$。
- 假设 BC 保持水平，然后尝试取力矩。三角形会倾斜，直至 G 位于钉的下方；摩擦力要应付的正是这个倾斜角。
- 只检查 BC 上的一点。最坏的情况在 BC 的端点，而正是这一点决定了界限。

STEP 之外

写出 $\tan\alpha \leq \mu$，即表示总接触力必须位于摩擦锥（cone of friction）之内，这是一个以法线为轴、半顶角为 $\arctan\mu$ 的圆锥。这个图像令许多摩擦问题（梯子、楔子、粗糙的钉）几乎变成几何问题，并且可以推广至有多个接触点的刚体（rigid body）：问题变成能否在每个锥内选取某些力，使之与负载平衡。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）便以这种严谨的态度处理摩擦与刚体平衡。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。