详细解答

STEP II 2016，第 1 题

纯数学 · 参数曲线与切线

STEP II 2016，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s2-q1

关键思路

用参数（parameter）而不是坐标来处理。O 处的直角会变成两点的参数 p 和 q 之间一条非常简单的关系，而一般点上的切线（tangent）用 t 表示时有一条简洁的方程。求出两条切线的交点后，交点的坐标会是 p 和 q 的对称函数（symmetric function），而 p 与 q 之间的关系正好足以把它们消去（eliminate）。

解答

一般点上的切线

在参数为 t 的点上，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2} \qquad (t \neq 0).$$

所以 (t^2, t^3) 处的切线是 $y - t^3 = \frac{3t}{2}(x - t^2)$，即

$$2y = 3tx - t^3. \qquad (*)$$

（当 $t = 0$ 时，这给出 $y = 0$，即尖点（cusp）处的切线，但我们不需要用到该点。）

直角

设 $P = (p^2, p^3)$ 及 $Q = (q^2, q^3)$。要令 $\angle POQ$ 有意义，两点都不能是 O，所以 $p \neq 0$ 且 $q \neq 0$。该角为直角当且仅当 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$：

$$p^2q^2 + p^3q^3 = p^2q^2(1 + pq) = 0.$$

由于 $p^2q^2 \neq 0$，这迫使

$$pq = -1.$$

特别地，$p \neq q$（它们的积是负数），所以 P 和 Q 处的切线斜率（gradient）不同，$\frac{3p}{2} \neq \frac{3q}{2}$，确实相交于唯一一点。

切线的交点

把 $(*)$ 分别取 $t = p$ 和 $t = q$ 的两个版本相减：

$$3(p-q)x = p^3 - q^3 = (p-q)(p^2+pq+q^2).$$

除以 $p - q \neq 0$，并利用 $pq = -1$，

$$3x = p^2 + pq + q^2 = p^2 + q^2 - 1.$$

代回 $t = p$ 时的 $(*)$：

$$\begin{aligned} 2y &= p(p^2+pq+q^2) - p^3 \\ &= p^2q + pq^2 = pq(p+q) = -(p+q). \end{aligned}$$

想一想 我们已用两个参数表示 x 和 y。怎样才能得到一条只含 x 和 y 的方程?

把 y 平方：出现的交叉项 $2pq$ 是已知常数，剩下的是 $p^2 + q^2$，而这正是 $3x$ 所含的部分。事实上，

$$4y^2 = (p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq = p^2 + q^2 - 2 = (3x+1) - 2 = 3x - 1.$$

所以 P 和 Q 处的切线相交于 C_2：$4y^2 = 3x - 1$ 上，得证。

（事实上 C_2 上每一点都会出现：当 p 取遍所有正实数时，$2y = -(p+q) = \frac{1}{p} - p$ 取遍所有实数值，而 x 则由 C_2 的方程确定。）

C_1 与 C_2 是否相交?

把 $x = t^2$、$y = t^3$ 代入 C_2 的方程：

$$4t^6 = 3t^2 - 1 \iff 4u^3 - 3u + 1 = 0, \quad \text{其中} u = t^2 \geq 0.$$

显然 $u = -1$ 是一个根，除去因式 $u + 1$ 得

$$4u^3 - 3u + 1 = (u+1)(4u^2 - 4u + 1) = (u+1)(2u-1)^2.$$

由于 $u \geq 0$，唯一可能是 $u = \frac{1}{2}$，所以 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$。因此两曲线确实相交，而且恰好交于两点

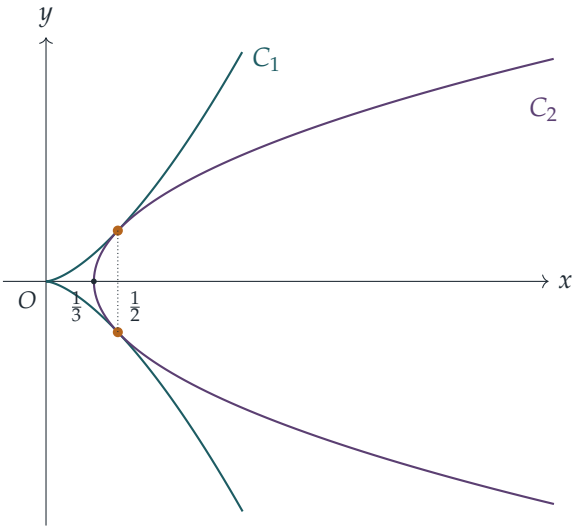
$$\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) \quad \text{及} \quad \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

重根（repeated root）告诉我们更多：两曲线在该处相切，而不是相交穿过。我们可以直接验证。在 $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 处，C_1 的斜率是 $\frac{3t}{2}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$。对 $4y^2=3x-1$ 进行隐函数求导（implicit differentiation）得 $8y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3$，所以在 $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 处，C_2 的斜率是 $\frac{3}{8y}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$，两者相同。由于图形关于 x 轴对称，另一点亦然。

由于对 $u\geq 0$ 有 $4u^3-3u+1=(u+1)(2u-1)^2\geq 0$，曲线 C_1 永远不会走进抛物线（parabola）内部：除了两个切点外，C_2 都位于 C_1 的两条分支之间。

草图

C_1 满足 $y^2=x^3$：它位于 $x\geq 0$ 的区域，关于 x 轴对称，并在 O 处有一个尖点（两条分支的斜率 $\frac{3t}{2}\to 0$，所以它们沿正 x 轴离开 O）。C_2 是抛物线 $x=\frac{1}{3}(4y^2+1)$，顶点（vertex）为 $(\frac{1}{3},0)$，开口向右，同样关于 x 轴对称。抛物线位于尖点之内、C_1 的两条分支之间，并在 $x=\frac{1}{2}$ 处与每条分支各相切一次。



验算

- 取 $p=1$、$q=-1$：$P=(1,1)$，$Q=(1,-1)$，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=1-1=0$。切线为 $2y=3x-1$ 及 $2y=-3x+1$，交于 $(\frac{1}{3},0)$，即 C_2 的顶点。
- 取 $p=2$、$q=-\frac{1}{2}$：切线 $2y=6x-8$ 与 $2y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{8}$ 交于 $x=\frac{13}{12}$、$y=-\frac{3}{4}$，而 $4y^2=\frac{9}{4}=3\cdot\frac{13}{12}-1$。
- 切点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{2}})\approx(0.5,\,0.35355)$ 满足 $4y^2=\frac{1}{2}=3x-1$，而该处两条曲线的斜率都是 ≈ 1.06066。用电脑检验了 10^5 对满足 $pq=-1$ 的随机参数，所有交点在舍入误差范围内都落在 C_2 上。

常见错误

- 忘记排除 $p = 0$ 或 $q = 0$：在除去因式以得到 $pq = -1$ 之前，必须确定 p^2q^2 不为零。
- 除以 $p - q$ 时没有说明它为何不为零。
- 停在“$4u^3 - 3u + 1 = 0$ 有根”，而没有检查它是否给出 $u = t^2 \geq 0$；根 $u = -1$ 并不对应 C_1 上的任何点。

STEP 之外

曲线 $y^2 = x^3$ 是经典的*尖点三次曲线*（cuspidal cubic），而把一条曲线与一条参数化曲线联立、再从重根看出相切的技巧，正是代数几何（algebraic geometry）的起点：相交重数（intersection multiplicity）计算曲线相交了多少次，而贝祖（Bézout）定理指出，一条三次曲线与一条二次曲线（conic）在正确计算重数下相交于六点。这里的六点是二重根 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$（共四个）和一对复数根 $t = \pm i$。一本浅白的入门书是 Kirwan 的 *Complex Algebraic Curves*（《复代数曲线》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。