详细解答

STEP I 2016，第 9 题

力学 · 极限摩擦力平衡

STEP I 2016，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s1-q9

关键思路

对 A 取力矩（moments）：墙上的两个力因此消去，栏杆处的法向反作用力（normal reaction）可直接以 θ 表示，完全不涉及摩擦力（friction）。只要知道每个摩擦力的方向，再沿水平和铅垂方向分解（resolving）便可完成。这正是本题的真正重点：摩擦力与杆即将发生的运动方向相反，所以我们必须判断端点 A 是即将沿墙向下滑，还是向上滑。

解答

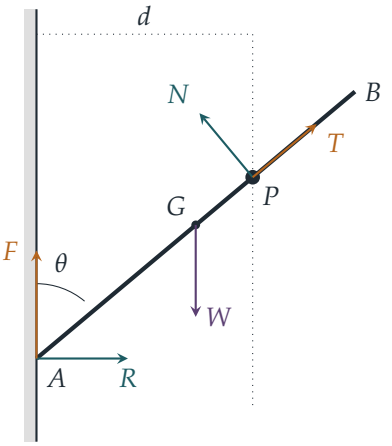
把杆模型化为重 W 的均匀刚性杆（uniform rigid rod），其中心 G 与 A 的距离为 a；把栏杆模型化为一条固定直线，与杆只相交于一点 P。由于 A 到栏杆的水平距离为 d，而杆与铅垂线成角 θ，

$$AP = \frac{d}{\sin\theta}.$$

条件 $a\sin\theta < d$ 表示 G 位于 A 与 P 之间。

各力如下：

- 在 A：法向反作用力 R，方向水平并离开墙壁；以及沿墙的摩擦力 F；
- 在 P：垂直于杆的法向反作用力 N；以及沿杆的摩擦力 T；
- 作用于 G 的重量 W。



图中 F 和 T 的箭头方向对应下文的第一种情况。

对 A 取力矩

由于 N 垂直于杆，N 对 A 的力矩为 $N \cdot AP$；T 沿杆作用，对 A 没有力矩，R 和 F 亦然。重量的力臂（lever arm）为 $a\sin\theta$。因此

$$N\frac{d}{\sin\theta} = Wa\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad N = \frac{Wa\sin^2\theta}{d}. \tag{1}$$

无论杆即将向哪个方向滑动，此式均成立。

杆向哪个方向滑动?

> ? **想一想** A 是即将沿墙向下滑，还是向上滑?

先假设完全没有摩擦力。沿铅垂方向分解，需要 $N\sin\theta = W$，结合 (1) 即 $a\sin^3\theta = d$。但此处 $a\sin^3\theta < a\sin\theta < d$，故由 (1) 得 $N\sin\theta < W$：单靠法向反作用力无法撑住杆，其余部分必须由摩擦力提供。杆即将向下滑动：A 沿墙下滑，θ 减小，$AP = d/\sin\theta$ 增大，于是杆穿过栏杆向墙壁方向滑下。摩擦力阻止这个运动，所以 F 沿墙向上，T 沿杆向上（指向 B），如图所示。在两个接触点均处于极限平衡（limiting equilibrium）时，

$$F = \mu R, \qquad T = \lambda N.$$

分解各力

沿杆向上的单位向量（unit vector）为 $(\sin\theta, \cos\theta)$，而 N 的方向为 $(-\cos\theta, \sin\theta)$（指向墙壁并向上）。沿水平方向分解：

$$R - N\cos\theta + \lambda N\sin\theta = 0 \quad\Longrightarrow\quad R = N(\cos\theta - \lambda\sin\theta).$$

（墙壁只能推，故需 $R \geq 0$，所以此情况要求 $\tan\theta \leq 1/\lambda$。）沿铅垂方向分解：

$$\begin{aligned} W &= \mu R + N\sin\theta + \lambda N\cos\theta \\ &= N\big(\mu\cos\theta - \lambda\mu\sin\theta + \sin\theta + \lambda\cos\theta\big) \\ &= N\big((\lambda+\mu)\cos\theta + (1-\lambda\mu)\sin\theta\big). \end{aligned}$$

代入 (1) 中的 N，再除以 $W\sin^2\theta$，得

$$d\operatorname{cosec}^2\theta = a\big((\lambda+\mu)\cos\theta + (1-\lambda\mu)\sin\theta\big),$$

这就是所求的结果。

$a\sin\theta > d$ 的情况

此时 G 位于栏杆之外。方程 (1) 和几何关系都不变，所以唯一的问题仍然是滑动的方向。

> **想一想** G 移到栏杆之外后，有甚么改变？

上面的论证显示，当 $a\sin^3\theta < d$ 时杆向下滑，当 $a\sin^3\theta > d$ 时杆向上滑。在 $a\sin\theta < d$ 的条件下只可能出现前者。在 $a\sin\theta > d$ 的条件下，后者变得可能：伸出栏杆之外部分的重量使 $N\sin\theta > W$，于是杆倾向穿过栏杆向远离墙壁的方向滑下，而 A 沿墙向上移动。这是新的情况，此时两个摩擦力的方向都相反：$F = \mu R$ 沿墙向下，$T = \lambda N$ 沿杆向下。在上面的推导中把 λ 换成 $-\lambda$、μ 换成 $-\mu$，得

$$R = N(\cos\theta + \lambda\sin\theta), \qquad W = N\big((1-\lambda\mu)\sin\theta - (\lambda+\mu)\cos\theta\big),$$

再结合 (1)，

$$d\operatorname{cosec}^2\theta = a\big((1-\lambda\mu)\sin\theta - (\lambda+\mu)\cos\theta\big).$$

此时 $R > 0$ 自动成立。（若 $a\sin^3\theta < d < a\sin\theta$，杆仍然即将向下滑，第一个结果照样适用，因为其推导从未用到 G 的位置。）

验算

- 没有摩擦力时（$\lambda = \mu = 0$），两个结果都化为 $d = a\sin^3\theta$，即上文所得的无摩擦平衡。
- 设 $\lambda = \tan\alpha$ 及 $\mu = \tan\beta$（即摩擦角（angle of friction）），右方分别变为 $a\sin(\theta+\alpha+\beta)/(\cos\alpha\cos\beta)$ 和 $a\sin(\theta-\alpha-\beta)/(\cos\alpha\cos\beta)$：两种情况只在摩擦角的正负号上有分别，理应如此。
- 取 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ 及 $\theta = \frac{1}{3}\pi$，两种情况分别给出 $d/a = \frac{3}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{32} \approx 0.862$ 和 $d/a = \frac{9\sqrt{3}}{32} - \frac{3}{8} \approx 0.112$。按上述摩擦力方向，把每个值代回力和力矩的方程，均得合力为零及力矩为零。

常见错误

- 以为栏杆的法向反作用力是铅垂的。事实上它垂直于杆，因为杆与栏杆只在一点接触。
- 在力矩方程中，以长度 d 而非 $d/\sin\theta$ 作为 A 到栏杆的距离。
- 未先想清楚杆实际上会向哪个方向移动，便定下摩擦力的方向。

STEP 之外

在向下和向上两个极限情况之间，杆对一整个区间的角度 θ 都能保持平衡：摩擦力带来的是一系列平衡状态，而不是单一个。描述这类集合（每个接触点的摩擦锥（friction cone），以及各接触点能够维持的状态集合）是接触力学（contact mechanics）以及机械人抓取分析的起点。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）以大学一年级程度，仔细讲解摩擦力与刚体静力学（rigid-body statics）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。