详细解答

STEP I 2016，第 8 题

纯数学 · 生成函数

> **STEP I 2016，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q8

本题在 *Beyond STEP* 第 9.4 节把数列看成函数中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/generating-functions.html

关键思路

生成函数（generating function）把整个数列包装成单一个函数，而对数列的运算就变成对这个函数的代数运算。在第 (i) 部分，$1-x$ 的负数次幂的二项级数（binomial series）给出我们想要的系数，然后我们用已知的数列组合出 n^2。在第 (ii) 部分，我们把递推关系（recurrence）乘以 x^n 再求和，从而化成关于 f 的方程：把数列的下标平移，等同于把它的生成函数乘以 x。

解答

第 (i) 部分

由指数为 -2 的二项级数，

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 0} \binom{-2}{n} (-x)^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^n,$$

因为 $\binom{-2}{n}(-1)^n = \frac{2\cdot 3\cdots(n+1)}{n!} = n+1$。乘以 x，

$$x(1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 0} (n+1)x^{n+1} = \sum_{n\geq 0} nx^n,$$

这里重新编排求和下标后，可以无碍地把 $n=0$ 也包括在内（该项为 0）。所以 $u_n = n$ 的生成函数是 $x(1-x)^{-2}$，如题所求。

同理，取指数 -3，

$$\binom{-3}{n}(-1)^n = \frac{3\cdot 4\cdots(n+2)}{n!} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

所以

$$(1-x)^{-3} = \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$$

乘以 x 并如前重新编排下标，

$$x(1-x)^{-3} = \sum_{n\geq 0}\frac{n(n+1)}{2}x^n,$$

所以该数列是 $u_n = \frac{1}{2}n(n+1)$，即 $0, 1, 3, 6, 10, \ldots$，也就是三角数（triangular numbers）。

> **想一想** 怎样从我们现在已知的两个数列得出 n^2?

生成函数是线性（linear）的：若 u_n 和 v_n 的生成函数分别是 f 和 g，则 $\alpha u_n + \beta v_n$ 的生成函数是 $\alpha \mathrm{f} + \beta \mathrm{g}$。由于

$$n^2 = 2\cdot\tfrac{1}{2}n(n+1) - n,$$

$u_n = n^2$ 的生成函数是

$$\frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x - x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

第 (ii)(a) 部分

对每个 $n \geq 1$，有 $u_n x^n = k u_{n-1} x^n$。对所有 $n \geq 1$ 求和：

$$\sum_{n\geq 1} u_n x^n = kx \sum_{n\geq 1} u_{n-1}x^{n-1}$$

$$\mathrm{f}(x) - u_0 = kx\,\mathrm{f}(x),$$

因为左边的和是 $\mathrm{f}(x)$ 去掉常数项，而右边的和在令 $m = n-1$ 后是 $\sum_{m\geq 0} u_m x^m = \mathrm{f}(x)$。由于 $u_0 = a$，这就是 $\mathrm{f}(x) = a + kx\,\mathrm{f}(x)$，如题所求。因此

$$\mathrm{f}(x) = \frac{a}{1-kx}.$$

（作为验算，展开得 $a + akx + ak^2x^2 + \cdots$，而确实 $u_n = ak^n$。）

第 (ii)(b) 部分

把 $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ 乘以 x^n，并对 $n \geq 2$ 求和（递推关系只由 $n = 2$ 起成立，所以必须由这里开始）：

$$\sum_{n\geq 2} u_n x^n = x\sum_{n\geq 2} u_{n-1}x^{n-1} + x^2\sum_{n\geq 2} u_{n-2}x^{n-2}.$$

想一想 这三个和各自缺少了 f 的哪些项?

左边缺少 $u_0 + u_1x$ 这些项；右边第一个和是 $u_1x + u_2x^2 + \cdots$，所以只缺少 u_0；第二个和就是整个 $\mathrm{f}(x)$。因此

$$\mathrm{f}(x) - u_0 - u_1x = x\big(\mathrm{f}(x) - u_0\big) + x^2\,\mathrm{f}(x).$$

代入 $u_0 = 0$ 和 $u_1 = 1$，这变成 $\mathrm{f}(x) - x = x\,\mathrm{f}(x) + x^2\,\mathrm{f}(x)$，所以

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

这是斐波那契数（Fibonacci numbers）$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ 的生成函数。

验算

- 展开 $x(1+x)(1-x)^{-3} = (x+x^2)(1+3x+6x^2+10x^3+\cdots)$ 得 $x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \cdots$，正是平方数，符合预期。
- 以长除法（long division）把 x 除以 $1 - x - x^2$，得 $x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \cdots$。
- 在 $x = 0.1$ 时和 $\sum n^2(0.1)^n$ 与 $0.11/0.9^3 = 0.150891\ldots$ 相符，而斐波那契数的 $\sum u_n(0.1)^n$ 与 $0.1/0.89 = 10/89 = 0.112359\ldots$ 吻合。这些结果，连同题目中每个生成函数的首 30 个系数，均已用电脑核实。

常见错误

- 弄错负指数的二项式系数（binomial coefficients）：来自 $\binom{-r}{n}$ 和来自 $(-x)^n$ 的正负号互相抵消，所以每个系数都是正数。
- 在 (ii)(b) 中由 $n = 0$ 或 $n = 1$ 开始求和，而递推关系在那里并不成立；或者忘记减去首项 u_0 和 u_1x。
- 把三角数写成 $\frac{1}{2}n(n-1)$：检查一下 $u_1 = 1$。

STEP 之外

把 $1 - x - x^2 = (1 - \phi x)(1 - \psi x)$ 因式分解，其中 $\phi, \psi = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$，再运用部分分式（partial fractions）配合第 (ii)(a) 部分，便得到比奈公式（Binet's formula）$u_n = (\phi^n - \psi^n)/\sqrt{5}$。同一方法可以解任何常系数线性递推关系，而生成函数是组合数学（combinatorics）和概率中的核心工具（在概率中它们成为概率生成函数（probability generating functions））。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）阐述概率方面的内容；

Wilf 的 *generatingfunctionology*（《生成函数学》）则是一本生动有趣、可免费取得的书，讲述组合方面的内容。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。