详细解答

STEP I 2016，第 6 题

纯数学 · 向量几何

STEP I 2016，第 6 题

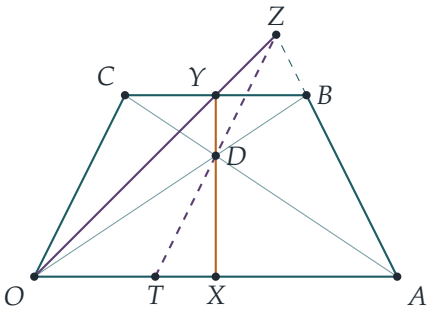
继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s1-q6

关键思路

图中每一点都是两条直线的交点，因此我们把每条直线写成向量形式（vector form），然后令两者相等。由于 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不平行（parallel），任何向量都只能以唯一一种方式写成 $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$，所以把同一点的两个表达式相等，就可以分别比较 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的系数（coefficients）。全程以 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 为基（basis），每一步都只需解两条简短的线性方程（linear equations）。

解答



c 与 x 的形式

由于 CB 与 OA 平行，向量 $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$ 是 $\mathbf{a}$ 的纯量倍数（scalar multiple），设 $\mathbf{c}-\mathbf{b}=k\mathbf{a}$，于是 $\mathbf{c}=k\mathbf{a}+\mathbf{b}$。沿四边形（quadrilateral）$O\to A\to B\to C$ 走一圈，边 BC 的方向必须与 OA 相反（若方向相同，边 AB 与 CO 便会相交，$OABC$ 就不是真正的四边形），而且 $C\neq B$。所以

$$k<0.$$

任何负值都有可能；$k=-1$ 时就是平行四边形（parallelogram）。

由于 X 在 OA 上，$\mathbf{x}$ 是 $\mathbf{a}$ 的倍数，设 $\mathbf{x}=m\mathbf{a}$；而 X 严格位于 O 与 A 之间，即

$$0<m<1.$$

此外，由于 O、A、B 不共线（collinear），$\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不平行。

点 Z

求 D。OB 上的点为 $\lambda\mathbf{b}$；AC 上的点为

$$\mathbf{a}+\mu(\mathbf{c}-\mathbf{a})=(1-\mu+\mu k)\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}.$$

比较系数，得 $\lambda=\mu$ 及 $1-\mu(1-k)=0$。因为 $k<0$，所以 $1-k>0$，故 $\mu=\frac{1}{1-k}$，且

$$\mathbf{d}=\frac{\mathbf{b}}{1-k}.$$

求 Y。BC 上的点为 $\mathbf{b}+t\mathbf{a}$。XD 上的点为

$$m\mathbf{a}+s(\mathbf{d}-m\mathbf{a})=m(1-s)\mathbf{a}+\frac{s}{1-k}\,\mathbf{b}.$$

由 $\mathbf{b}$ 的系数得 $s=1-k$，于是 $\mathbf{a}$ 的系数为 $m(1-(1-k))=mk$。所以

$$\mathbf{y}=\mathbf{b}+mk\,\mathbf{a}.$$

求 Z。OY 上的点为 $\rho(\mathbf{b}+mk\mathbf{a})$；$AB$ 上的点为 $\mathbf{a}+\sigma(\mathbf{b}-\mathbf{a})=(1-\sigma)\mathbf{a}+\sigma\mathbf{b}$。比较系数，得 $\rho=\sigma$ 及 $\rho mk=1-\sigma$，所以 $\rho(mk+1)=1$。只要 $mk+1\neq 0$，便有

$$\mathbf{z}=\frac{\mathbf{b}+mk\,\mathbf{a}}{mk+1},$$

此即所求。（若 $mk=-1$——这在 $k<-1$ 时可能发生——则 $\mathbf{y}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$，所以 OY 与 AB 平行，Z 不存在。）

> ? **想一想** Z 是否在边 AB 本身之上?

不是：因为 $-1<mk<0$，所以 $\sigma=\frac{1}{mk+1}>1$，即 Z 位于 AB 越过 B 的延长线上，正如图中所示。这并不要紧，因为题目讨论的是直线。

点 T 与两条关系式

DZ 上的点为 $\mathbf{d}+\tau(\mathbf{z}-\mathbf{d})$。其 $\mathbf{b}$ 的系数为

$$\frac{1}{1-k}+\tau\left(\frac{1}{mk+1}-\frac{1}{1-k}\right)=\frac{1}{1-k}-\tau\,\frac{k(1+m)}{(mk+1)(1-k)},$$

这里用了 $(1-k)-(mk+1) = -k(1+m)$。要 T 在 OA 上，此系数必须为零，所以 $\tau = \dfrac{mk+1}{k(1+m)}$（留意 $k \neq 0$）。于是 $\mathbf{a}$ 的系数为

$$\tau \cdot \frac{mk}{mk+1} = \frac{mk+1}{k(1+m)} \cdot \frac{mk}{mk+1} = \frac{m}{1+m}.$$

因此

$$\mathbf{t} = \frac{m}{1+m}\,\mathbf{a}.$$

值得注意的是，k 消失了：T 只取决于 X 的位置。

现设 $a = |\mathbf{a}| = OA$。由于 $0 < \frac{m}{1+m} < 1$，T 位于 O 与 A 之间，所以

$$OT = \frac{ma}{1+m}, \qquad TA = a - \frac{ma}{1+m} = \frac{a}{1+m}, \qquad OX = ma.$$

因此

$$OT \times OA = \frac{ma^2}{1+m} = ma \times \frac{a}{1+m} = OX \times TA,$$

以及

$$\frac{1}{OX} + \frac{1}{OA} = \frac{1}{ma} + \frac{1}{a} = \frac{1+m}{ma} = \frac{1}{OT},$$

这两条正是所要证明的结果。

验算

试用图中的梯形（trapezium）：$\mathbf{a} = (4,0)$，$\mathbf{b} = (3,2)$，$k = -\frac{1}{2}$，$m = \frac{1}{2}$。于是 $D = (2, \frac{4}{3})$，$Y = (2,2)$，$Z = (\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$，$T = (\frac{4}{3}, 0)$；你可以验证 T、D、Z 共线，而且 $\frac{1}{OT} = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{OX} + \frac{1}{OA}$。以电脑对 20,000 个随机梯形作检验，结果与上述每条公式的误差都在 10^{-10} 以内。极限情况 $m \to 1$（$X \to A$）给出 $OT = \frac{1}{2}OA$，与 $\frac{1}{OT} = \frac{2}{OA}$ 一致。

常见错误

- 取 $k > 0$：若 $\mathbf{c} = \mathbf{b} + k\mathbf{a}$ 且 $k > 0$，这个“四边形”会自我相交。
- 比较系数时没有说明为何可以这样做：这要依赖 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不平行。
- 对两条不同的直线使用同一个参数（parameter）字母，这会强加一个虚假的重合。

STEP 之外

T 不取决于 k(亦不取决于 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 之间的夹角),这说明它其实是仿射几何(affine geometry),甚至是射影几何（projective geometry）中的定理：要紧的只是点线的关联关系，以及同

一直线上的比。关系式 $\frac{1}{OT} = \frac{1}{OX} + \frac{1}{OA}$ 正是交比（cross-ratio）与调和点列（harmonic range）能优雅处理的那类命题；而重复同一作图，便可依次得到位于 $\frac{m}{1+2m}\mathbf{a}$、$\frac{m}{1+3m}\mathbf{a}$ 等处的点。如欲深入了解，可参阅考克斯特（Coxeter）与 Greitzer 合著的 *Geometry Revisited*（《几何学的新探索》），或考克斯特的 *Projective Geometry*（《射影几何》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。