详细解答

STEP I 2016，第 5 题

纯数学 · 相切圆

STEP I 2016，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s1-q5

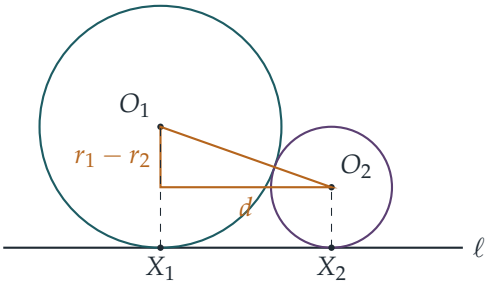
关键思路

一切都建基于一个事实：若两个圆互相相切（touch），而且都与同一条直线相切，那么它们与该直线的两个切点之间的距离是 $2\sqrt{r_1 r_2}$。这只需要一个直角三角形（right-angled triangle）便可得出。之后，代换（substitution）$x = 1/\sqrt{a}$、$y = 1/\sqrt{b}$、$z = 1/\sqrt{c}$ 把 $(**)$ 化成一个对称（symmetric）的四次式（quartic），而它可以因式分解（factorise）成四个一次因式（linear factor），其中一个因式恰好就是 $(*)$。

解答

第 (i) 部分

在直线上互相相切的两个圆。取半径分别为 r_1 和 r_2 的两个圆，它们互相外切（touch externally），都位于直线 ℓ 的同一侧，并分别在点 X_1 和 X_2 与 ℓ 相切。连到 X_1 和 X_2 的半径都垂直于 ℓ，所以圆心 O_1、O_2 位于 ℓ 上方高度 r_1 和 r_2 之处。由于两圆外切，$O_1O_2 = r_1 + r_2$。



从 O_2 向半径 O_1X_1 作垂线（图中 $r_1 \geq r_2$）。这样便得到一个直角三角形，其斜边（hy-

potenuse）为 r_1+r_2，铅垂边为 $|r_1-r_2|$，水平边为 $d=X_1X_2$。由毕氏定理（Pythagoras' theorem），

$$d^2=(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2=4r_1r_2, \qquad \text{所以} \qquad X_1X_2=2\sqrt{r_1r_2}.$$

应用三次。在图中，每两个圆都互相相切，而三个圆都与直线相切，切点为 P、Q、R，其中 Q 位于 P 与 R 之间。所以

$$PQ=2\sqrt{ab}, \qquad QR=2\sqrt{bc}, \qquad PR=2\sqrt{ac},$$

而由 $PQ+QR=PR$ 得 $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}=\sqrt{ac}$。两边除以 $\sqrt{abc}>0$，

$$\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{b}},$$

这正是 $(*)$。

推导 $(**)$。设 $x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$、$y=\dfrac{1}{\sqrt{b}}$、$z=\dfrac{1}{\sqrt{c}}$，于是 $\dfrac{1}{a}=x^2$，如此类推，而 $(*)$ 即是 $y=x+z$。那么 $(**)$ 变成 $2(x^4+y^4+z^4)=(x^2+y^2+z^2)^2$；展开右方并移项，它等价于

$$F:=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2=0.$$

想一想 这个四次式可以怎样因式分解?

把它组合成平方差（difference of two squares）。由于 $(x^2+y^2-z^2)^2=x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$，

$$\begin{aligned}F&=(x^2+y^2-z^2)^2-(2xy)^2\\&=(x^2-2xy+y^2-z^2)(x^2+2xy+y^2-z^2)\\&=((x-y)^2-z^2)((x+y)^2-z^2)\\&=(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z)(x+y+z).\end{aligned}$$

由 $(*)$，$x-y+z=0$，所以 $F=0$，即 $(**)$ 成立。

第 (ii) 部分

现在 a、b、c 是任意满足 $(**)$ 且 $b<c<a$ 的正数。如前定义 x、y、z；它们都是正数，而由于 $t\mapsto 1/\sqrt{t}$ 在 $t>0$ 上是递减（decreasing）的，条件 $b<c<a$ 给出

$$y>z>x>0.$$

如第 (i) 部分所示，$(**)$ 等价于

$$(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z)(x+y+z)=0,$$

所以四个因式之中有一个为零。其中三个不可能为零：

- $x+y+z>0$，因为三者都是正数；
- $x+y-z>0$，因为 $y>z$ 且 $x>0$；
- $x-y-z<0$，因为 $x<y$ 且 $z>0$。

因此 $x-y+z=0$，即 $y=x+z$，亦即

$$\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{c}},$$

这正是 $(*)$。（其实只需要用到 b 是三者中最小这一点。）

验算

- 取 $a=4$、$c=1$。那么由 $(*)$ 得 $1/\sqrt{b}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$，所以 $b=\frac{4}{9}$。此时 $2\left(\frac{1}{16}+\frac{81}{16}+1\right)=\frac{49}{4}$，而 $\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+1\right)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$，正如 $(**)$ 所要求。
- 为甚么 (ii) 需要大小次序的条件？取 $a=4$、$c=1$，关系式 $(**)$ 是 $1/b$ 的二次方程，有两个根：$b=\frac{4}{9}$ 和 $b=4$（由 $1/\sqrt{b}=|x-z|=\frac{1}{2}$ 得出）。第二个根使 b 成为最大而非最小，它满足 $(**)$ 却不满足 $(*)$：此时以 $1/\sqrt{c}=1/\sqrt{a}+1/\sqrt{b}$ 联系起来的是 a 和 b。对调字母的角色，对应于对调哪一个圆位于中间。
- 以电脑对数以千计随机生成、在一条直线上互相相切的三圆构形作检验，$(*)$ 和 $(**)$ 均得到证实。

常见错误

- 把圆心之间的距离 r_1+r_2 当作切点之间的距离：两个圆心的高度并不相同。
- 在第 (ii) 部分，未排除其余三个因式便从因式分解得出 $(*)$；这正是需要用到 $b<c<a$ 的地方。

STEP 之外

关系式 $(**)$ 是笛卡儿圆定理（Descartes' circle theorem）的退化情况（degenerate case）：对于四个两两相切、曲率（curvature）为 $k_i=1/r_i$ 的圆，有 $2\sum k_i^2=\left(\sum k_i\right)^2$，而一条直线可视为曲率为 0 的圆。不断在空隙中填入新的圆，便得到阿波罗尼斯垫片（Apollonian gasket），其中整数曲率引出令人惊讶的数论（number theory）结果。F 的因式分解也正是希罗公式（Heron's formula）背后的那一个：$16\Delta^2=-F$，其中 x,y,z 为三角形的三边。若想进一步了解圆的几何以及能令这些结果一目了然的反演（inversion），可参阅 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。