详细解答

STEP I 2016，第 4 题

纯数学 · 曲线的曲率

STEP I 2016，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s1-q4

关键思路

κ 的表达式看似一条艰深的二阶微分方程（second-order differential equation），但第 (i) 部分正是要说明它其实是某个函数的导数，可直接积分（exact derivative）。设 $p = \mathrm{f}'(x)$，曲率（curvature）就是 $p/\sqrt{1+p^2}$ 对 x 的导数，因此常数曲率一眼便可积分一次。第二次积分则属例行工夫，而答案原来是一个熟悉的形状。

解答

第 (i) 部分

对 $z(1+z^2)^{-1/2}$ 使用乘积法则（product rule），

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{(1+z^2)^{1/2}}\right) &= (1+z^2)^{-1/2} - z\cdot z(1+z^2)^{-3/2} \\ &= \frac{(1+z^2)-z^2}{(1+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+z^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

第 (ii) 部分

设 κ 为非零常数，并记 $p = \mathrm{f}'(x)$，于是 $\mathrm{f}''(x) = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$。由第 (i) 部分及链式法则（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = \frac{1}{(1+p^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{f}''(x)}{(1+(\mathrm{f}'(x))^2)^{3/2}} = \kappa.$$

对 x 积分，存在一个常数，我们把它写成 $-\kappa a$（因 $\kappa \neq 0$，这样做是可行的），使得

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \kappa(x-a). \qquad (*)$$

想一想 如何从 $(*)$ 解出 p，而又不会弄错正负号?

只要记住平方会丢失甚么信息，平方便是安全的。由于 $\sqrt{1+p^2} > 0$，$(*)$ 表示 p 与 $\kappa(x-a)$ 同号；又因 $|p| < \sqrt{1+p^2}$，它亦表示 $|\kappa(x-a)| < 1$。两边平方，得 $p^2 = \kappa^2(x-a)^2(1+p^2)$，所以

$$p^2 = \frac{\kappa^2(x-a)^2}{1-\kappa^2(x-a)^2}, \qquad \text{并按上述选取正负号,} \qquad p = \frac{\kappa(x-a)}{\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}}.$$

反过来，这个 p 确实满足 $(*)$，因为 $1+p^2 = 1/(1-\kappa^2(x-a)^2)$。

现在再积分一次。由于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2} = \dfrac{-\kappa^2(x-a)}{\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}}$，对某常数 b，我们得到

$$y = b - \frac{1}{\kappa}\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}, \qquad |x-a| < \frac{1}{|\kappa|}.$$

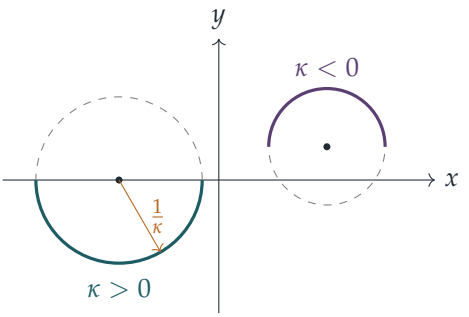
整理后得 $\kappa(y-b) = -\sqrt{1-\kappa^2(x-a)^2}$，再平方便得

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{1}{\kappa^2}.$$

因此，每条具有非零常数有号曲率（signed curvature）κ 的曲线，都是以 (a,b) 为圆心、半径为 $1/|\kappa|$ 的圆的一部分；而且每段这样的圆弧都会出现：把步骤倒过来，上述每个函数的有号曲率都恰好是 κ。更准确地说，$\kappa(y-b) \leq 0$，所以：

- 若 $\kappa > 0$, 曲线是下半圆 $y = b - \sqrt{\kappa^{-2} - (x-a)^2}$, 位于圆心下方, 向上弯曲 ($f'' > 0$);
- 若 $\kappa < 0$, 曲线是上半圆 $y = b + \sqrt{\kappa^{-2} - (x-a)^2}$, 位于圆心上方, 向下弯曲 ($f'' < 0$)。

端点 $x = a \pm 1/|\kappa|$ 须排除，因为该处斜率为无限大；曲线 $y = f(x)$ 只能是一个函数的图像，所以它最多只能是一个开半圆（或其中一段）。



几何意义

对这些曲线而言，$|\kappa|$ 是圆半径的倒数，所以 $|\kappa|$ 越大，圆就越小、弯得越紧。κ 的正负号记录曲线向哪一方弯曲：当圆心位于曲线上方（曲线上凹（concave up））时 $\kappa > 0$；当圆心位于曲线下方时 $\kappa < 0$。

验算

- 取 $\kappa = \frac{1}{2}$，$a = b = 0$：曲线是 $y = -\sqrt{4 - x^2}$，即半径为 2 的圆的下半部分。在 $x = 1$ 处，$y = -\sqrt{3}$，$y' = x/\sqrt{4 - x^2} = 1/\sqrt{3}$，而 $y'' = 4/(4 - x^2)^{3/2} = 4/3^{3/2}$，所以 $1 + y'^2 = \frac{4}{3}$，且 $\kappa = \dfrac{4/3^{3/2}}{(4/3)^{3/2}} = \frac{1}{2}$，与预期相符。
- 直线有 $\mathrm{f}'' = 0$，所以 $\kappa = 0$：这是半径 $1/|\kappa| \to \infty$ 时圆的极限，亦是题目排除 $\kappa = 0$ 的原因。
- 用电脑从随机初始值逐步数值求解 $\mathrm{f}'' = \kappa(1 + \mathrm{f}'^2)^{3/2}$，所得各点准确至小数点后六位都留在预测的圆上。

常见错误

- 第一次积分时忘记积分常数（constant of integration），因而失去把圆心左右移动的自由度。
- 为 p 选错平方根，结果得到位于圆心错误一侧的半圆，以及错误的 κ 正负号。
- 只说“κ 是半径”：其实它是半径的倒数，并带有表示弯曲方向的正负号。

STEP 之外

曲率是曲线微分几何（differential geometry）的起点。对以弧长（arc length）s 参数化的曲线，$\kappa = \mathrm{d}\psi/\mathrm{d}s$，其中 ψ 是切线（tangent）与 x 轴所成的角；这里 $p/\sqrt{1 + p^2} = \sin\psi$，所以 $(*)$ 实际上是说 ψ 沿曲线以恒定速率变化。在三维空间中，曲率之外还有挠率（torsion），而 Frenet–Serret 公式（Frenet–Serret formulae）显示，这两个函数在相差一个刚体运动（rigid motion）的意义下决定了一条曲线。Pressley 的 *Elementary Differential Geometry*（《初等微分几何》）是一本大学一年级程度、平易近人的入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。