详细解答

STEP I 2016，第 12 题

概率与统计 · 二项分布的对称性

STEP I 2016，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s1-q12

本题在 *Beyond STEP* 第 12.6 节多一枚硬币中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/one-more-coin.html

关键思路

第 (i) 部分和第 (ii) 部分是直接运用二项概率（binomial probabilities）的计算，而两者都得出同一个简单得惊人的答案。第 (iii) 部分则解释个中原因。把 Bob 的掷币分成前 n 次和额外的一次：在前 n 次掷币中，Bob 和 Alice 处于完全对等的地位，所以对称性（symmetry）便能解决问题；而额外的一次掷币则公平地打破平局。

解答

全文中，设 A 为 Alice 掷得正面的次数，B 为 Bob 掷得正面的次数。把一枚公正硬币掷 m 次，正面次数 X 满足

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{m}{k}\frac{1}{2^m}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m,$$

而 Alice 和 Bob 的掷币互相独立（independent），所以可以把 A 和 B 的概率相乘。

第 (i) 部分

Alice 掷两次，Bob 掷三次，所以

k	0	1	2	3
$\mathrm{P}(A=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	
$\mathrm{P}(B=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

以 Alice 的得分为条件（condition on）。给定 $A=a$，我们需要 $B>a$，因此需要尾概率（tail probabilities）$\mathrm{P}(B>0)=\frac{7}{8}$、$\mathrm{P}(B>1)=\frac{1}{2}$、$\mathrm{P}(B>2)=\frac{1}{8}$。故此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B>A) &= \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{7}{8}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{8}\\ &= \frac{7+8+1}{32}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

第 (ii) 部分

现在对 $a=0,1,2,3$，有 $\mathrm{P}(A=a)=\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{8}$；而对 $k=0,\ldots,4$，有 $\mathrm{P}(B=k)=\frac{1}{16},\frac{4}{16},\frac{6}{16},\frac{4}{16},\frac{1}{16}$。尾概率为

$$\mathrm{P}(B>0)=\tfrac{15}{16},\quad \mathrm{P}(B>1)=\tfrac{11}{16},\quad \mathrm{P}(B>2)=\tfrac{5}{16},\quad \mathrm{P}(B>3)=\tfrac{1}{16}.$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B>A) &= \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{15}{16}+\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{11}{16}+\tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{5}{16}+\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{16}\\ &= \frac{15+33+15+1}{128}=\frac{64}{128}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

答案再一次恰好是 $\frac{1}{2}$。

第 (iii) 部分

首先，看看掷币次数相同的游戏的一个事实。当 Alice 和 Bob 各掷 n 次时，“Bob 较多”、“相同”、“Alice 较多”三者中恰有一个发生。两名玩家的处境是对称的（他们进行完全相同的试验），所以“Alice 较多”的概率也是 p_2。因此

$$2p_2+p_1=1. \qquad (*)$$

现在让 Alice 掷 n 次，Bob 掷 $n+1$ 次。设 B' 为 Bob 前 n 次掷币中正面的次数，并设 H 为他最后一次掷得正面的事件。那么若 H 发生，则 $B=B'+1$；否则 $B=B'$。

? **想一想** 比较 B 与 A 的结果，怎样取决于比较 B' 与 A 的结果?

由于 B' 和 A 都是整数，而 B 不是 B' 就是 $B'+1$：

- 若 $B'>A$，则无论最后一次结果如何，必然有 $B>A$；
- 若 $B'=A$，则 $B>A$ 当且仅当最后一次掷得正面；

- 若 $B' < A$，则 $B' \le A - 1$，所以 $B \le A$，Bob 不会胜出。

Bob 的前 n 次掷币对 Alice 的 n 次掷币，正正就是掷币次数相同的游戏，所以 $\mathrm{P}(B' > A) = p_2$ 及 $\mathrm{P}(B' = A) = p_1$。最后一次掷币与其他一切独立，且 $\mathrm{P}(H) = \frac{1}{2}$。故此

$$\mathrm{P}(\text{Bob 掷得的正面比 Alice 多}) = p_2 + \tfrac{1}{2}p_1.$$

由 $(*)$，$p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2}(2p_2 + p_1) = \frac{1}{2}$。

这就是所求的推广（generalisation）：*若 Alice 把一枚公正硬币掷 n 次，而 Bob 把一枚公正硬币掷 $n+1$ 次，则对每个 $n \ge 0$，Bob 掷得的正面比 Alice 多的概率都是 $\frac{1}{2}$*。第 (i) 部分和第 (ii) 部分分别是 $n = 2$ 和 $n = 3$ 的情况。

验算

- $n = 0$：Alice 不掷，Bob 掷一次；Bob 胜出当且仅当他掷得正面，概率为 $\frac{1}{2}$。
- $n = 2$：用手计算，$p_1 = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$，再由 $(*)$ 得 $p_2 = \frac{5}{16}$。于是 $p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{5}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$，与第 (i) 部分吻合。
- 用电脑精确穷举（exact enumeration）证实，对每个不超过 29 的 n，都有 $\mathrm{P}(B > A) = \frac{1}{2}$；而对第 (ii) 部分进行 200 000 次试验的模拟（simulation），得出 0.4997。

常见错误

- 在掷币次数相同的游戏中假设 $p_2 = \frac{1}{2}$：平局的概率是正数，所以 $p_2 = \frac{1}{2}(1 - p_1) < \frac{1}{2}$。
- 在第 (iii) 部分漏掉 $B' = A$ 的情况，或把它整个计入，而没有乘上额外一次掷币的因子 $\frac{1}{2}$。
- 用了尾概率 $\mathrm{P}(B \ge a)$ 而不是 $\mathrm{P}(B > a)$。

STEP 之外

这个简洁的答案来自对称性论证，再加上以额外一步为条件——这种模式贯穿整个概率论，从随机游走（random walks）到选票问题（ballot problems）都可见到。还有一个更巧妙的版本：由于 Bob 多掷一次，他未能掷得比 Alice 多的正面，当且仅当他掷得比她多的反面。把正面和反面互换，可见“正面较多”与“反面较多”的概率相等，而两者互补（complementary），所以各自的概率都是 $\frac{1}{2}$。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）一书，对这些条件化和对称性技巧有深入的发展。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。