详细解答

STEP I 2016，第 11 题

力学 • 抛体的最大射程

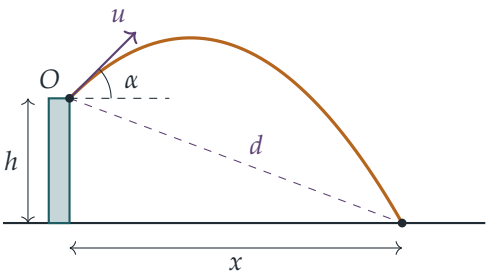
> **STEP I 2016，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q11

关键思路

写出水平和铅直方向的运动，消去时间，再把 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的平方化成倍角（double angle）。至于最大射程，把落地方程视为以隐函数（implicit function）方式把 x 定义为 α 的函数，然后对它求导：在最大值处 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha = 0$，余下的就只是关于单一未知量 $\cos 2\alpha$ 的三角代数运算。

解答

我们把 P 模拟为只受重力作用的质点（particle）（不计空气阻力（air resistance）），并假设平地是水平的。取坐标轴，原点在塔底，x 轴沿发射方向水平，y 轴铅直向上，因此 O 为点 $(0, h)$。



落地方程

发射后时间 t 时，

$$X = ut\cos\alpha, \qquad Y = h + ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

塔是直立的，而 P 落在某个距离 $x > 0$ 处，所以 $\cos\alpha \neq 0$，且在落地时（即 $Y = 0$ 时）$t = \dfrac{x}{u\cos\alpha}$：

$$0 = h + x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}.$$

两边乘以 $2\cos^2\alpha$，并利用 $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$ 及 $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$：

$$\frac{gx^2}{u^2} = 2h\cos^2\alpha + 2x\sin\alpha\cos\alpha = h(1+\cos 2\alpha) + x\sin 2\alpha,$$

这正是所求的方程。

最大水平距离

角 α 的取值范围为 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$（容许向下发射）。对每个这样的 α，落地距离 x 是 α 的正值光滑函数，而且当 $\alpha \to \pm\frac{\pi}{2}$ 时 $x \to 0$，因为水平速率 $u\cos\alpha$ 趋于 0，而飞行时间保持有界。因此 x 在某个内部的 α 处取得最大值，而在该处 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha = 0$。

把落地方程对 α 求导，记 $x' = \mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha$：

$$\frac{2gx}{u^2}\,x' = -2h\sin 2\alpha + x'\sin 2\alpha + 2x\cos 2\alpha.$$

令 $x' = 0$，得

$$x\cos 2\alpha = h\sin 2\alpha.$$

这里 $\cos 2\alpha \neq 0$：否则由 $h\sin 2\alpha = 0$ 及 $h > 0$，便会迫使 $\sin 2\alpha = 0$ 同时成立，这是不可能的。所以在最大值处

$$x = h\tan 2\alpha,$$

即为所求。

> **想一想** 现在我们有两条关于 x 和 α 的方程。怎样才能干净俐落地消去 x?

把 $x = h\tan 2\alpha$ 代入落地方程，并记 $c = \cos 2\alpha$、$s = \sin 2\alpha$。右方变为

$$h(1+c) + h\,\frac{s^2}{c} = \frac{h\,(c + c^2 + s^2)}{c} = \frac{h(1+c)}{c},$$

而左方为

$$\frac{gh^2}{u^2}\cdot\frac{s^2}{c^2} = \frac{gh^2(1-c)(1+c)}{u^2c^2}.$$

令两者相等，再除以 $h(1+c)/c$——它不为零，因为 $c \neq -1$（我们已证明 $c \neq 0$，而 $c = -1$ 会给出 $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$）：

$$\frac{gh(1-c)}{u^2c} = 1 \quad\Longrightarrow\quad gh - ghc = u^2c \quad\Longrightarrow\quad \cos 2\alpha = \frac{gh}{u^2+gh}.$$

由于这是驻点（stationary point）处唯一可能的值，而 $\tan 2\alpha = x/h > 0$ 确定了 $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$，所以恰好只有一个驻点，而它就是最大值。（顺带一提，$\tan 2\alpha = \dfrac{u\sqrt{u^2+2gh}}{gh}$，所以最大距离为 $x = \dfrac{u\sqrt{u^2+2gh}}{g}$。）

与 O 的最大距离

落地点在 $(x, 0)$，所以它与 $O = (0, h)$ 的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + h^2}.$$

在 h 固定的情况下，d 随 x 递增，所以 d 恰好在 x 最大时取得最大值。在该处 $x = h\tan 2\alpha$，所以

$$d = \sqrt{h^2\tan^2 2\alpha + h^2} = h\sec 2\alpha = h \cdot \frac{u^2+gh}{gh} = \frac{u^2}{g} + h,$$

这里用到 $\sec 2\alpha > 0$。这就是所求的最大距离。

验算

- 当 $h = 0$ 时，得 $\cos 2\alpha = 0$，所以 $\alpha = 45°$，最大射程为 u^2/g：正是在平地上我们熟悉的结果。
- 取 $u = 10$、$g = 10$、$h = 5$（国际单位制）。那么 $\cos 2\alpha = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$，最大射程为 $\sqrt{100\cdot 200}/10 = 10\sqrt{2} \approx 14.14$，而 $d = \sqrt{200+25} = 15 = \frac{100}{10} + 5$，与预测相符。用电脑对 α 进行搜索，亦证实 14.14 是最大的落地距离。
- 当 h 增大时，$\cos 2\alpha \to 1$，所以最佳角度趋于 0：从极高的塔上发射，应该差不多水平地射出。

常见错误

- 写出 $x = h\tan 2\alpha$ 后，忘记它只在最大值处成立，而非对所有 α 都成立。
- 除以 $1 + \cos 2\alpha$ 或 $\cos 2\alpha$ 时，没有说明它们为何不为零。
- 另行对 d 求最大值，而没有留意到 $d^2 = x^2 + h^2$ 与 x 在同一角度取得最大值。

STEP 之外

答案 $d = u^2/g + h$ 有一个优美的几何解释。所有从 O 以速率 u 射出的轨迹，都与同一条包络线（envelope）相切，这就是“安全抛物线”（parabola of safety），它的焦点（focus）

在 O，准线（directrix）位于 O 上方高度 u^2/g 处。最远的落地点位于这条包络线上，所以根据焦点—准线性质，它与 O 的距离等于它在准线下方的距离，即 $u^2/g + h$。曲线族的包络线是大学一年级微积分和力学的标准课题。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）是下一步的好选择，书中以同样严谨的方式处理抛射体问题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。