详细解答

STEP I 2016，第 10 题

力学 · 碰撞与恢复系数

STEP I 2016，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s1-q10

关键思路

题中共有三次碰撞（collision），每一次都用同样的两条方程处理：动量守恒（conservation of momentum）和牛顿恢复定律（Newton's law of restitution）。头两次碰撞同时发生，但彼此独立，所以可以分开计算，求出 B 和 C 相遇前一刻的速度。再由 B 最终静止这个条件，得到一条联系 λ 与 e 的方程。

解答

我们把四个物体视为光滑桌面上的质点（particle），因此除碰撞外没有水平力作用，而且每次碰撞都是正碰（direct collision，即沿同一直线发生）。取由 A 指向 D 的方向为正方向，于是 A 的初速度为 u，D 的初速度为 $-u$。



第 (i) 部分

A 撞 B。设碰撞后 A 和 B 的速度分别为 v_A 和 v_B。则

$$\begin{aligned} &\text{动量：} && \lambda m u = \lambda m v_A + m v_B, \\ &\text{恢复：} && v_B - v_A = eu. \end{aligned}$$

把 $v_B = v_A + eu$ 代入第一条方程，得 $(\lambda+1)v_A = (\lambda - e)u$，所以

$$v_A = \frac{(\lambda - e)u}{\lambda + 1}, \qquad v_B = v_A + eu = \frac{\lambda(1+e)u}{\lambda+1}.$$

D **撞** C。设碰撞后 C 和 D 的速度分别为 v_C 和 v_D。则

$$\begin{aligned} \text{动量：} \quad & -mu = mv_C + mv_D, \\ \text{恢复：} \quad & v_D - v_C = e(0 - (-u)) = eu. \end{aligned}$$

（碰撞前 C 与 D 以速率 u 互相接近；碰撞后 D 在 C 的右方，所以两者以 $v_D - v_C$ 的速率分离。）解这两条方程：

$$v_C = -\tfrac{1}{2}(1+e)u, \qquad v_D = -\tfrac{1}{2}(1-e)u.$$

因此 C 以速率 $\frac{1}{2}(1+e)u$ 向 B 移动，而 D 则以较小的速率 $\frac{1}{2}(1-e)u$ 跟在后面向左移动。

B **撞** C。此时 B 以 v_B 向右移动，C 向左移动，所以两者的接近速率为 $v_B - v_C$。碰撞后 B 静止；设 C 的速度为 w。则

$$\begin{aligned} \text{动量：} \quad & mv_B + mv_C = 0 + mw, \\ \text{恢复：} \quad & w - 0 = e(v_B - v_C). \end{aligned}$$

消去 w，得 $v_B + v_C = e(v_B - v_C)$，即

$$(1-e)v_B = -(1+e)v_C.$$

代入上面求得的速度：

$$(1-e)\cdot\frac{\lambda(1+e)u}{\lambda+1} = (1+e)\cdot\tfrac{1}{2}(1+e)u.$$

由于 $u \neq 0$ 且 $1+e > 0$，可以两边除以 $(1+e)u$：

$$\begin{aligned} 2\lambda(1-e) &= (1+e)(\lambda+1) \\ 2\lambda - 2\lambda e &= \lambda + 1 + e\lambda + e \\ \lambda - 1 &= e(3\lambda + 1), \end{aligned}$$

又因 $3\lambda + 1 > 0$,

$$e = \frac{\lambda - 1}{3\lambda + 1},$$

即为所求。

至于推论部分,

$$\frac{1}{3} - e = \frac{(3\lambda+1) - 3(\lambda-1)}{3(3\lambda+1)} = \frac{4}{3(3\lambda+1)} > 0,$$

因为 $\lambda > 1$。故 $e < \frac{1}{3}$。（另外，由于 $\lambda > 1$，有 $e > 0$，所以这些碰撞确实不是完全非弹性碰撞（perfectly inelastic collision）。）

第 (ii) 部分

第三次碰撞后，C 的速度为

$$w = v_B + v_C = (1+e)u\left(\frac{\lambda}{\lambda+1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{(1+e)(\lambda-1)u}{2(\lambda+1)},$$

由于 $\lambda > 1$，此值为正：C 现在向右移动，折返向 D，而 D 仍以速率 $\frac{1}{2}(1-e)u$ 向左移动。

> **想一想** “速率相同”给出哪一条方程？又怎样消去 e？

两者速率相等时，

$$\frac{(1+e)(\lambda-1)}{2(\lambda+1)} = \frac{1-e}{2}.$$

由第 (i) 部分，$1+e = \dfrac{4\lambda}{3\lambda+1}$，$1-e = \dfrac{2(\lambda+1)}{3\lambda+1}$。代入并约去公因子 $\dfrac{1}{3\lambda+1}$：

$$\begin{aligned} \frac{4\lambda(\lambda-1)}{\lambda+1} &= 2(\lambda+1) \\ 2\lambda^2 - 2\lambda &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ \lambda^2 - 4\lambda - 1 &= 0, \end{aligned}$$

所以 $\lambda = 2 \pm \sqrt{5}$。只有 $\lambda = 2+\sqrt{5}$ 满足 $\lambda > 1$（另一个根是负数）。于是

$$e = \frac{1+\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}{49-45} = \frac{4\sqrt{5}-8}{4} = \sqrt{5}-2.$$

因此

$$\lambda = 2+\sqrt{5}, \qquad e = \sqrt{5}-2.$$

验算

- $e = \sqrt{5}-2 \approx 0.236$，确实介乎 0 与 $\frac{1}{3}$ 之间，符合第 (i) 部分的要求。
- 取 $\lambda = 2+\sqrt{5} \approx 4.236$、$u = 1$、$e \approx 0.236$，以数值逐一计算三次碰撞，得第三次碰撞前 $v_B = 1$（恰巧是精确值）及 $v_C \approx -0.618$；碰撞后 B 静止，C 以约 0.382 的速率向右移动，而 D 以约 0.382 的速率向左移动。共同速率为 $\frac{1}{2}(1-e)u = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})u$。
- 极限情况：当 $\lambda \to 1$ 时，$e \to 0$。质量相等且 $e = 0$ 时，B 与 C 以大小相等、方向相反的速度相遇，因此两者黏合后静止，结果合理。

常见错误

- 在 C 与 D 碰撞的恢复方程中弄错正负号：所有速度都应以同一个正方向表示，并小心运用“分离速率 $= e\times$ 接近速率”。

- 忘记 C 到达第三次碰撞时是朝向 B 移动的，所以接近速率是 $v_B - v_C = v_B + \frac{1}{2}(1+e)u$，而不是 $v_B - \frac{1}{2}(1+e)u$。
- 保留了负数根 $\lambda = 2 - \sqrt{5}$。

STEP 之外

带恢复系数的碰撞是能量损失最简单的模型：正碰中损失的动能（kinetic energy）与 $1 - e^2$ 成正比，而 $e = 1$ 就是能量守恒的弹性碰撞（elastic collision）。在大学一年级的课程中，这些概念会引出质心参考系（centre-of-mass frame）：在这个参考系中，任何二体碰撞看起来都是对称的，上面的代数运算几乎变得微不足道。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）就是以这种方式讲解碰撞的。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。