详细解答

STEP I 2016，第 1 题

纯数学 · 多项式恒等式与因式分解

> **STEP I 2016，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/16-s1-q1

关键思路

商（quotient）$q_n(x)$ 其实是一个多项式（polynomial）：由于 $2n+1$ 是奇数，$x+1$ 整除 $x^{2n+1}+1$，而商是一个正负交替的等比数列之和。因此第 (i) 部分只需展开 p_n 并比较系数（coefficients）。第 (ii) 部分的关键在于 p_n 的形式：当 $2n+1$ 乘以 x 是完全平方数（perfect square）时，p_n 是两个平方数之差（difference of two squares），因此可以因式分解（factorise）。

解答

第 (i) 部分

当 $x \neq -1$ 时，把首项为 1、公比为 $-x$ 的等比级数（geometric series）求和，得

$$1 - x + x^2 - \cdots + x^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-x)^k = \frac{1-(-x)^{2n+1}}{1+x} = \frac{1+x^{2n+1}}{1+x},$$

这里用到了 $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$，因为 $2n+1$ 是奇数。所以

$$q_n(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \cdots - x + 1,$$

它的 $2n+1$ 个系数全部是 ± 1，而且正负交替。接下来我们逐一展开 p_n。

$n = 1$.

$$p_1(x) = (x+1)^2 - 3x = x^2 + 2x + 1 - 3x = x^2 - x + 1 = q_1(x).$$

$n = 2$.

$$\begin{aligned} p_2(x) &= (x+1)^4 - 5x(x^2+x+1) \\ &= (x^4+4x^3+6x^2+4x+1) - (5x^3+5x^2+5x) \\ &= x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = q_2(x). \end{aligned}$$

$n = 3$. 首先 $(x^2+x+1)^2 = x^4+2x^3+3x^2+2x+1$，所以

$$\begin{aligned} p_3(x) &= (x+1)^6 - 7x(x^2+x+1)^2 \\ &= (x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1) - (7x^5+14x^4+21x^3+14x^2+7x) \\ &= x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = q_3(x). \end{aligned}$$

因此当 $n = 1, 2, 3$ 时，对 $x \neq -1$ 有 $p_n(x) \equiv q_n(x)$，正如所求。

$n = 4$. 只需一个 x 值便足以推翻一条恒等式（identity）。当 $x = 1$ 时，

$$p_4(1) = 2^8 - 9 \cdot 1 \cdot 3^3 = 256 - 243 = 13, \qquad q_4(1) = \frac{1+1}{1+1} = 1,$$

所以 $p_4 \neq q_4$。（完全展开可得 $p_4(x) = x^8 - x^7 + x^6 + 2x^5 + 7x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 1$，从 x^5 项起便出错。）

第 (ii) 部分

? **想一想** 应该用哪个 n 和哪个 x？p_n 又怎样才可能因式分解？

把 $\dfrac{x^{2n+1}+1}{x+1}$ 与题目给出的数对应起来，便确定了 x 和 n。这时 p_n 的形式就派上用场：$(x+1)^{2n} = ((x+1)^n)^2$ 必定是平方数，而当 n 是奇数时，$(x^2+x+1)^{n-1}$ 也是平方数。因此，若 $(2n+1)x$ 同样是完全平方数，$p_n(x)$ 便是两个平方数之差。

(a) 取 $n = 1$ 及 $x = 300$，于是 $2n+1 = 3$，且 $3x = 900 = 30^2$。由第 (i) 部分，

$$\begin{aligned} \frac{300^3+1}{301} = q_1(300) = p_1(300) &= 301^2 - 3 \cdot 300 \\ &= 301^2 - 30^2 \\ &= (301-30)(301+30) = 271 \times 331. \end{aligned}$$

两个因数都不是 1。（直接计算，$300^2 - 300 + 1 = 89\,701 = 271 \times 331$。）

(b) 由于 $7^{49} = (7^7)^7$，取 $n = 3$（于是 $2n+1 = 7$）及 $x = 7^7$。那么 $(2n+1)x = 7 \cdot 7^7 =$

$7^8 = (7^4)^2$ 是完全平方数，而且 $n-1=2$ 是偶数。由第 (i) 部分，

$$\frac{7^{49}+1}{7^7+1} = q_3(7^7) = p_3(7^7) = (7^7+1)^6 - 7^8\,(7^{14}+7^7+1)^2$$
$$= [(7^7+1)^3]^2 - [7^4(7^{14}+7^7+1)]^2,$$

所以

$$\frac{7^{49}+1}{7^7+1} = \Big[(7^7+1)^3 - 7^4(7^{14}+7^7+1)\Big]\Big[(7^7+1)^3 + 7^4(7^{14}+7^7+1)\Big].$$

第二个因数显然大于 1。至于第一个因数，$(7^7+1)^3 > 7^{21}$，而

$$7^4(7^{14}+7^7+1) = 7^{18}+7^{11}+7^4 < 7^{19},$$

所以第一个因数大于 $7^{21}-7^{19} = 48\cdot 7^{19} > 1$。两个因数都不是 1，于是得到所求的因式分解。（把括号乘开，两个因数亦可写成 $7^{21}+3\cdot 7^{14}+3\cdot 7^7+1 \mp (7^{18}+7^{11}+7^4)$。）

验算

- 在第 (i) 部分代入 $x=1$: $p_1(1) = 4-3 = 1, p_2(1) = 16-15 = 1, p_3(1) = 64-63 = 1$，全部等于 $q_n(1) = 1$，而 $p_4(1) = 13$。
- 在 (a) 中，$271\times 331 = 89\,701 = 300^2 - 300 + 1$。
- 在 (b) 中，用电脑检验准确的整数值，证实两个因数之积等于 $(7^{49}+1)/(7^7+1)$；两个因数分别约为 5.57×10^{17} 和 5.60×10^{17}。

常见错误

- 忘记说明为何两个因数都不是 1；在 (b) 中这需要简短地估计大小。
- 在 (b) 中用 $n=24$ 或 $x=7$: 指数 49 必须写成 7×7，从而得到 $x=7^7$ 及 $2n+1=7$。

STEP 之外

这里的技巧是奥里费伊因式分解（Aurifeuillean factorisation）的一个特例：例如 $x^4+4y^4 = (x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy)$ 这类恒等式，能把形如 $a^k\pm 1$ 的数分解得比明显的代数因式更细。它们源自分圆多项式（cyclotomic polynomials），这是大学一年级代数和数论（number theory）课程会出现的内容，而且曾被用于分解形如 $2^k\pm 1$ 的大数。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是进一步了解因式分解和质数（primes）的好读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。