详细解答

STEP III 2015，第 9 题

力学 · 非线性弹性振动

STEP III 2015，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s3-q9

关键思路

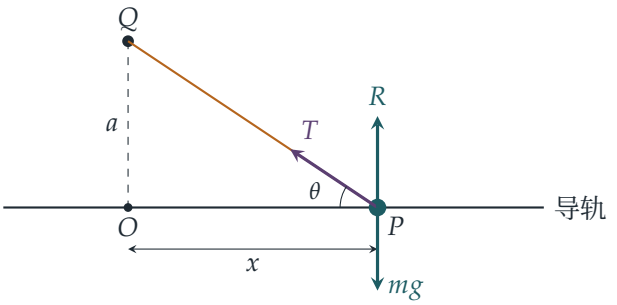
导轨光滑(smooth),法向反作用力(normal reaction)不做功,所以能量守恒(conservation of energy)，由此即可直接得到一阶方程（first-order equation）。由于在导轨上每一点都有 $PQ \geq a$，弦从不松弛（slack）。转向点（turning point）就是 $\dot{x} = 0$ 的位置。周期（period）是由中心走到 x_0 所需时间的四倍。当 v 很小时，质点一直停留在起点附近，所以 $\sqrt{x^2 + a^2} - a \approx x^2/(2a)$，而代换（substitution）$x = x_0 u$ 则可把积分整理好。

解答

能量方程

把 P 视为质点,弦视为轻而有弹性、遵从胡克定律(Hooke's law)。取导轨为 x 轴, P 从原点出发, 原点即由 Q 所作垂线的垂足。当 P 位于 x 时, 它与 Q 的距离为 $PQ = \sqrt{x^2 + a^2} \geq a$, 所以弦是拉紧的，其伸长量（extension）为

$$e = \sqrt{x^2 + a^2} - a \ \ (\geq 0).$$



作用于 P 的力有其重量、导轨的法向反作用力 R（两者都与运动方向垂直，所以不做功），以及张力（tension）T。张力是保守力（conservative force），其弹性势能（elastic potential energy）为 $\lambda e^2/(2a)$。开始时 $e=0$，速率为 v，所以能量守恒给出

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{\lambda}{2a}\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)^2=\tfrac{1}{2}mv^2.$$

两边乘以 $2/m$，并记 $k^2=\lambda/(ma)$，得

$$\dot{x}^2=v^2-k^2\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)^2,$$

此即所求。

最大位移及该处的加速度

伸长量 e 随 $|x|$ 增大而增大，所以 P 向外移动时 $\dot{x}^2$ 递减，而 P 会一直向外移动，直至 $\dot{x}=0$。在该点 $k\left(\sqrt{x_0^2+a^2}-a\right)=v$（由于 $e\geq 0$，取正根）。因此

$$\sqrt{x_0^2+a^2}=a+\frac{v}{k}\quad\Longrightarrow\quad x_0^2=\left(a+\frac{v}{k}\right)^2-a^2=\frac{2av}{k}+\frac{v^2}{k^2},$$

得

$$x_0=\frac{\sqrt{v\,(2ak+v)}}{k}.$$

求加速度时，沿导轨方向分解。设 θ 为 PQ 与导轨之间的夹角，则 $\cos\theta=x/\sqrt{x^2+a^2}$，而张力沿导轨的分量为 $T\cos\theta$，指向 O。由 $T=\lambda e/a$，

$$m\ddot{x}=-\frac{\lambda}{a}\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},\qquad\text{所以}\qquad\ddot{x}=-k^2\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

（把能量方程对 t 求导，再约去 $2\dot{x}$，亦得到相同结果。）在 $x=x_0$ 处有 $\sqrt{x_0^2+a^2}-a=v/k$ 及 $\sqrt{x_0^2+a^2}=(ak+v)/k$，所以

$$\ddot{x}=-k^2\cdot\frac{v}{k}\cdot\frac{k\,x_0}{ak+v}=-\frac{k^2v\,x_0}{ak+v}=-\frac{kv\sqrt{v\,(2ak+v)}}{ak+v}.$$

因此在 x_0 处加速度的大小为 $\dfrac{kv\sqrt{v(2ak+v)}}{ak+v}$，方向沿导轨指回初始位置。

周期

$\dot{x}^2$ 的方程只依赖于 x^2，所以运动关于 O 对称。质点在 $-x_0$ 与 x_0 之间振荡，而 $O\to x_0\to O\to -x_0\to O$ 这四段各需相同的时间。在第一段中 $\dot{x}>0$，所以 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x/\dot{x}$，周期为

$$\tau=4\int_0^{x_0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v^2-k^2\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)^2}}.$$

被积函数（integrand）在 x_0 处趋于无穷，但只是如 $(x_0-x)^{-1/2}$ 般增长，所以积分收敛（converge）。

> **想一想** $v \ll ka$ 告诉我们 x 的大小是怎样的？

由于 $x_0^2 = 2av/k + v^2/k^2$，若 $v/k \ll a$，则 $x_0^2 \approx 2av/k$，所以 $x_0^2/a^2 \approx 2v/(ka) \ll 1$。因此积分范围内每个 x 都满足 $|x| \ll a$，而二项式展开（binomial expansion）给出

$$\sqrt{x^2+a^2} - a = a\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} - a \approx \frac{x^2}{2a}.$$

周期变为

$$\tau \approx 4\int_0^{x_0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v^2 - k^2x^4/(4a^2)}}, \qquad x_0 \approx \sqrt{\frac{2av}{k}},$$

而这个近似的 x_0 正好是新分母等于零的位置，因为 $k^2x_0^4/(4a^2) = v^2$。现在代入 $x = x_0 u$，于是 $\mathrm{d}x = x_0\,\mathrm{d}u$ 及 $k^2x^4/(4a^2) = v^2u^4$：

$$\tau \approx 4\int_0^1 \frac{x_0\,\mathrm{d}u}{v\sqrt{1-u^4}} = \frac{4}{v}\sqrt{\frac{2av}{k}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}} = \sqrt{\frac{32a}{kv}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}},$$

因为 $\frac{16}{v^2}\cdot\frac{2av}{k} = \frac{32a}{kv}$。这就是所求的近似式。

验算

- 单位：$k^2 = \lambda/(ma)$ 的单位是 s^{-2}，所以 v/k 是长度（理应如此，因为它是 x_0 处的伸长量），而 $\sqrt{a/(kv)}$ 是时间。
- 取 $m=1$、$\lambda=2$、$a=1$、$v=1$，得 $k=\sqrt{2}$、$x_0 = \sqrt{1+2\sqrt{2}} \approx 1.3836$，以及 x_0 处的加速度 ≈ -1.1462。以数值方法逐步推进运动方程，得到相同的转向点，周期约为 7.612，与积分结果吻合。
- 取 $a=1$、$k=2$、$v=0.001$，精确的周期积分为 165.862，而近似式给出 165.833，其中 $\int_0^1 (1-u^4)^{-1/2}\,\mathrm{d}u \approx 1.3110$。当 $v \to 0$ 时，两者之比趋于 1。

常见错误

- 把伸长量当作 x 或 $\sqrt{x^2+a^2}$，而不是 $\sqrt{x^2+a^2}-a$；弦开始时处于自然长度（natural length）。
- 忘记分解张力：只有分量 $T\cos\theta$ 沿导轨作用。
- 把周期当作 $2\int_0^{x_0}$ 或 $\int_0^{x_0}$；振荡是在 $-x_0$ 与 x_0 之间进行的，所以需要四个四分之一周期。

STEP 之外

当 v 很小时，回复力（restoring force）大致与 x^3 而非 x 成正比，所以这是一个非线性振子（nonlinear oscillator），其周期依赖于振幅（amplitude）：与简谐运动（simple harmonic motion）不同，能量越小，周期越大，按 $v^{-1/2}$ 增长。积分 $\int_0^1 (1-u^4)^{-1/2}\,\mathrm{d}u$ 是一个椭圆积分（elliptic integral）（等于双纽线常数（lemniscate constant）的一半），摆（pendulum）的精确周期也会出现这类积分。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）以同样的精神讲解能量方法和振荡。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。