详细解答

STEP III 2015，第 8 题

纯数学 · 极坐标微分方程

STEP III 2015，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s3-q8

本题在 *Beyond STEP* 第 8.4 节盘旋趋向圆中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch08/limit-cycle.html

关键思路

两条微分方程（differential equations）都由组合 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ 和 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ 构成，而这正是极坐标（polar coordinates）能够化简的式子：它们分别变成 $r^2\,\mathrm{d}\theta$ 和 $r\,\mathrm{d}r$。因此我们把 θ 视为沿曲线的参数（parameter），把 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 写成两个对 θ 的导数（derivative）之比，让三角部分自行化简。在第 (ii) 部分，新增的项使方程变成关于 r 的伯努利方程（Bernoulli equation），而代换 $u = r^{-2}$ 可把它化为线性（linear）方程。

解答

记 r' 为 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$，$c = \cos\theta$ 及 $s = \sin\theta$。沿曲线 $r = r(\theta)$，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = r'c - rs, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = r's + rc, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}.$$

把任一方程两边乘以 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$，形如 $P\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Q$ 的方程便变成

$$P\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - Q\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = 0.$$

全部工夫都靠以下两条恒等式：

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = rc(r's + rc) - rs(r'c - rs) = r^2(c^2 + s^2) = r^2,$$
$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = rc(r'c - rs) + rs(r's + rc) = rr'.$$

第 (i) 部分

这里 $P = y + x$ 而 $Q = y - x$，所以

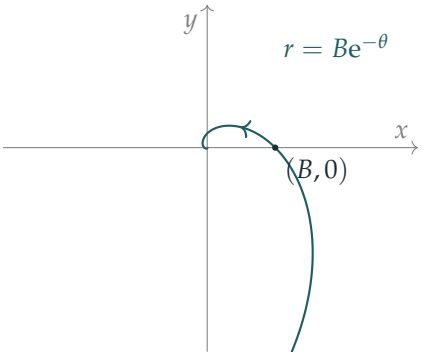
$$\begin{aligned}(y+x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - (y-x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} &= \left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)\\ &= r^2 + rr'.\end{aligned}$$

因此方程为 $r(r' + r) = 0$，由于 $r > 0$，可以除以 r，得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} + r = 0,$$

即所求。

这是可分离变量 (separable) 的方程 (或直接认出它是指数衰减)：$r = B\mathrm{e}^{-\theta}$，其中 $B > 0$。这是一条等角螺线 (equiangular spiral)，亦称对数螺线 (logarithmic spiral)。当 θ 增加时，曲线以逆时针方向绕向原点，但永不到达；当 θ 减少时，它无界地向外盘旋。由于 $r/r' = -1$，曲线与每条由原点出发的射线都以相同角度相交，即与指向原点的径向成 45°。不同的 B 给出同一螺线的旋转，因为 $B\mathrm{e}^{-\theta} = \mathrm{e}^{-(\theta - \ln B)}$。



箭头表示 θ 增加的方向。螺线每绕一圈便缩小 $\mathrm{e}^{2\pi} \approx 535$ 倍，所以在任何比例下都只看得见大约一圈；其余部分都紧密地挤在原点周围。

第 (ii) 部分

现在 $P = y + x - x(x^2 + y^2)$ 而 $Q = y - x - y(x^2 + y^2)$，其中 $x^2 + y^2 = r^2$。新增的项贡献

$$-r^2\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right) = -r^2 \cdot r^2 = -r^4,$$

所以利用第 (i) 部分处理原有的项，方程变成

$$r^2 + rr' - r^4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r^3 - r,$$

同样是除以 $r > 0$ 所得。

想一想 r^3 这一项令方程不再是线性的，我们该如何处理它?

这是一条伯努利方程。目标答案以 r^2 表示，提示我们使用 $u = r^{-2}$。于是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -2r^{-3}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2r^{-3}(r^3 - r) = -2 + 2u.$$

所以 $u' - 2u = -2$，这是一条常系数线性方程：$u = 1$ 是一个特解（particular solution），而 $A\mathrm{e}^{2\theta}$ 是齐次方程（homogeneous equation）的解，因此

$$\frac{1}{r^2} = 1 + A\mathrm{e}^{2\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad r^2 = \frac{1}{1 + A\mathrm{e}^{2\theta}},$$

这正是所求的形式。（分离变量，并对 $\dfrac{1}{r(r-1)(r+1)}$ 使用部分分式（partial fractions），亦可得出相同结果，只是较费工夫。）曲线只在 $1 + A\mathrm{e}^{2\theta} > 0$ 的地方存在。

解的形状

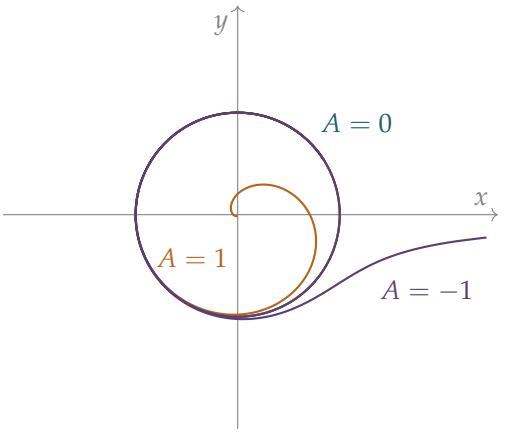
首先留意，若 $A = \pm\mathrm{e}^{-2\alpha}$，则 $A\mathrm{e}^{2\theta} = \pm\mathrm{e}^{2(\theta-\alpha)}$，所以对应 A 的曲线，就是对应 $A = \pm 1$ 的曲线旋转 α 所得。因此按 A 的正负号，实际上只有三种形状。

- $A = 0$：$r = 1$，即单位圆。
- $A > 0$: $1 + A\mathrm{e}^{2\theta} > 1$, 所以 $r < 1$, 而曲线对每个 θ 都有定义。由于 $r' = r(r^2 - 1) < 0$, r 稳定地递减。当 $\theta \to -\infty$ 时，$r \to 1$，所以曲线从内侧向外盘旋趋向单位圆；当 $\theta \to +\infty$ 时，$r \approx A^{-1/2}\mathrm{e}^{-\theta} \to 0$，所以它盘旋进入原点，看起来愈来愈像第 (i) 部分的螺线。
- $A < 0$：我们需要 $\mathrm{e}^{2\theta} < -1/A$，即 $\theta < \theta_0 = \frac{1}{2}\ln(-1/A)$。此时 $r > 1$ 且 $r' > 0$。当 $\theta \to -\infty$ 时, $r \to 1$ 从上方趋近, 所以曲线从外侧向内盘旋趋向单位圆；当 $\theta \to \theta_0^-$ 时, $r \to \infty$。在 θ_0 附近, $1 + A\mathrm{e}^{2\theta} \approx 2(\theta_0 - \theta)$ (因为 $A\mathrm{e}^{2\theta_0} = -1$), 所以 $r \approx \big(2(\theta_0 - \theta)\big)^{-1/2}$, 而曲线到直线 $\theta = \theta_0$ 的距离为

  $$r\sin(\theta_0 - \theta) \approx r(\theta_0 - \theta) \approx \frac{1}{2r} \to 0.$$

  因此曲线趋向无穷远，并以通过原点、倾角为 θ_0 的直线为渐近线（asymptote），从顺时针一侧趋近它。当 $A = -1$ 时，$\theta_0 = 0$，而对于大的 x，曲线最终贴近 $y = -\frac{1}{2x}$。

单位圆是一个极限环（limit cycle）：当 $\theta \to -\infty$ 时，其他每个解都盘旋趋向它；当 θ 增加时，则盘旋离开它。



紫红色曲线（$A=-1$）沿正 x 轴、紧贴其下方伸向无穷远。

验算

- 把 $r=B\mathrm{e}^{-\theta}$ 代回第 (i) 部分的原方程，在几个点上检查（换算成 x、y 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$），结果为零；对第 (ii) 部分的公式，取若干正负不同的 A 值检查，结果亦然。
- $A=0$ 给出 $r=1$，而常数 $r=1$ 确实满足 $r'=r^3-r$；以 x、y 表示，圆 $x^2+y^2=1$ 使新增的项与原有的项恰好抵消。
- 从 $r(0)=\frac{1}{2}$ 出发（即 $A=3$），公式给出 $r(2)=1/\sqrt{1+3\mathrm{e}^4}\approx 0.0779$，与 $r'=r^3-r$ 的逐步数值解在许多位小数上吻合。
- 对于 $A=-1$，在 $\theta=-10^{-4}$ 处，$r\approx 70.71$，而到 x 轴的距离为 $0.00707\approx 1/(2r)$，印证了渐近线。

常见错误

- 忘记 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 必须在 r 会变化的情况下以 $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta)/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta)$ 求得，即漏掉了含 r' 的项。
- 当 $A<0$ 时忽略了限制 $1+A\mathrm{e}^{2\theta}>0$，因而没有察觉这些曲线在有限的角度便趋向无穷远。
- 对每种 A 的正负号只画一条曲线，却没有说明其他曲线都是它的旋转。

STEP 之外

方程 $r' = r^3 - r$ 是一个平面动力系统（dynamical system）的极坐标描述，而单位圆是一个极限环：一条孤立的闭轨道，邻近的轨迹都盘旋趋向它或离开它。这类径向方程可以独立分离出来的系统，是非线性微分方程和相平面分析（phase-plane analysis）课程中的标准入门例子，并引向庞加莱–本迪克森定理（Poincaré–Bendixson theorem）。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）有一章很好地讲解非线性系统与极限环。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。