详细解答

STEP III 2015，第 7 题

纯数学 · 微分算子

> **STEP III 2015，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q7

关键思路

x 的幂是 $\mathrm{D} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的特征函数（eigenfunction）：把 D 作用于 x^a，结果只是乘以 a。因此 D^n 对多项式是逐项作用的，把 x^r 的系数乘以 r^n，而这正是最后那个和式中 r^n 的来源。至于整除性（divisibility），要留意每作用一次 D，因式 $(1-x)$ 的次方最多只会减少一。

解答

开首的结果

对任何常数 a（若 a 不是整数，则需 $x > 0$），

$$\mathrm{D}x^a = x \cdot ax^{a-1} = ax^a.$$

再作用一次 D，并利用这个结果，把常数 a 提出来，

$$\mathrm{D}^2x^a = \mathrm{D}(ax^a) = a\,\mathrm{D}x^a = a^2x^a,$$

即为所求。由于 D 是线性（linear）的（对常数 α, β，有 $\mathrm{D}(\alpha f + \beta g) = \alpha\,\mathrm{D}f + \beta\,\mathrm{D}g$），重复这一步，由归纳法（induction）可得

$$\mathrm{D}^n x^a = a^n x^a \qquad (n \geq 1).$$

第 (i) 部分

设 $\mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{r} c_k x^k$，其中 $c_r \neq 0$。由线性及上述结果，

$$\mathrm{D}^n \mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{r} c_k\, k^n x^k.$$

这是一个没有高于 x^r 的项的多项式，而其 x^r 项的系数为 $r^n c_r$。由于 $r \geq 1$，故 $r^n \neq 0$，又 $c_r \neq 0$，所以 $r^n c_r \neq 0$。因此 $\mathrm{D}^n\mathrm{P}(x)$ 是次数（degree）恰好为 r 的多项式。

（条件 $r \geq 1$ 是必要的：常数多项式会被映到 0，因为 $0^n = 0$。）

第 (ii) 部分

固定 m。我们对 n 用归纳法证明：当 $1 \leq n \leq m$ 时，

$$\mathrm{D}^n(1-x)^m = (1-x)^{m-n}\,\mathrm{Q}_n(x) \quad \text{对某个多项式} \mathrm{Q}_n.$$

基本情况。$\mathrm{D}(1-x)^m = x\cdot(-m(1-x)^{m-1}) = (1-x)^{m-1}\cdot(-mx)$，所以 $\mathrm{Q}_1(x) = -mx$。

归纳步骤。假设命题对某个满足 $n < m$ 的 n 成立，于是 $m-n \geq 1$。由乘积法则（product rule），

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{n+1}(1-x)^m &= x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x)^{m-n}\mathrm{Q}_n(x)\Big] \\
&= x\Big[-(m-n)(1-x)^{m-n-1}\mathrm{Q}_n(x) + (1-x)^{m-n}\mathrm{Q}_n'(x)\Big] \\
&= (1-x)^{m-n-1}\cdot x\Big[(1-x)\mathrm{Q}_n'(x) - (m-n)\mathrm{Q}_n(x)\Big].
\end{aligned}$$

方括号内是一个多项式，所以上式具有所需的形式，其中 $\mathrm{Q}_{n+1}(x) = x[(1-x)\mathrm{Q}_n'(x) - (m-n)\mathrm{Q}_n(x)]$。

> **想一想** 在归纳步骤中，我们在哪里用到了 $n < m$?

只有当 $m-n-1 \geq 0$，即 $n < m$ 时，提出因式 $(1-x)^{m-n-1}$ 作为多项式因式才有意义。到了 $n = m$，已经再没有 $(1-x)$ 的因式可以减少，所以归纳（理所当然地）在那里停止。

因此对每个正整数 $n < m$，$\mathrm{D}^n(1-x)^m$ 都能被 $(1-x)^{m-n}$ 整除。

第 (iii) 部分

用二项式定理（binomial theorem）展开：

$$(1-x)^m = \sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}x^r.$$

与第 (i) 部分完全一样，把 D^n 逐项作用，

$$\mathrm{D}^n(1-x)^m = \sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}r^n x^r.$$

由第 (ii) 部分，在 $n < m$ 时，左方等于 $(1-x)^{m-n}\mathrm{Q}_n(x)$，且 $m-n \geq 1$，所以它在 $x = 1$ 时等于零。因此在右方代入 $x = 1$，便得

$$\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{m}{r}r^n = 0,$$

即为所求。（$r = 0$ 那一项是 $0^n = 0$，与 D 消去常数项一致。）

验算

取 $m = 3$、$n = 2$：和式为 $0 - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 4 - 1 \cdot 9 = 0$。取 $m = 4$、$n = 3$：$0 - 4 + 6 \cdot 8 - 4 \cdot 27 + 64 = 0$。我们亦已用电脑验证此恒等式对所有 $1 \le n < m \le 19$ 均成立，并验证了当 $m \le 11$ 时，$(1-x)^{m-n}$ 是整除 $\mathrm{D}^n(1-x)^m$ 的确切次方。作为对照，当 $n = m$ 时和式不再为零：当 $m = 2$ 时，它是 $0 - 2 + 4 = 2 = 2!$，一般而言则是 $(-1)^m m!$。

常见错误

- 把 $\mathrm{D}^2 x^a$ 写成 $x^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} x^a = a(a-1)x^a$：$\mathrm{D}^2$ 是把 D 作用两次，而不是 x^2 乘以二阶导数。
- 在第 (i) 部分，忘记说明为何首项系数（leading coefficient）$r^n c_r$ 不为零；条件 $r \ge 1$ 正是用在这里。
- 在第 (iii) 部分，在作用 D^n 之前就把 $x = 1$ 代入 $(1-x)^m$；重点在于因式 $(1-x)$ 在 $n < m$ 次作用后仍然保留。

STEP 之外

算子（operator）$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 有时称为欧拉（Euler）算子，而 x^a 是它的特征函数，对应的特征值（eigenvalue）为 a；它是处理欧拉—柯西方程（Euler–Cauchy equations）的自然工具，例如 $x^2y'' + bxy' + cy = 0$，在代换 $x = e^t$ 下会变成常系数方程。第 (iii) 部分的恒等式说的是：次数低于 m 的多项式，其 m 阶有限差分（finite difference）为零；它与斯特林数（Stirling numbers）以及用容斥原理（inclusion–exclusion）计算满射（surjection）个数密切相关。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）讲述了欧拉方程；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶问题》）收录了更多同类风格的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。