详细解答

STEP III 2015，第 6 题

纯数学 · 根的对称函数

STEP III 2015，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s3-q6

关键思路

关于 w、z 这一对数的一切,都由它们的和与积决定,因为 w 和 z 正是 $t^2-(w+z)t+wz=0$ 的两个根。于是第 (i) 部分其实是在问：一个实系数二次方程（quadratic equation）何时有实根；而条件 $u^2\le 2v$ 不过是乔装了的判别式（discriminant）。在第 (ii) 部分，头两条方程确定了积 wz，第三条方程随即变成只含 u 的三次方程（cubic equation），而且有一个一眼就能看出的根。

解答

第 (i) 部分

推动整个证明的恒等式（identity）是

$$2v-u^2=2(w^2+z^2)-(w+z)^2=w^2-2wz+z^2=(w-z)^2.$$

我们亦注意到 $wz=\frac{1}{2}((w+z)^2-(w^2+z^2))=\frac{1}{2}(u^2-v)$。

若 w 和 z 是实数：那么 $u=w+z$ 和 $v=w^2+z^2$ 当然是实数，而由于 $w-z$ 是实数，$2v-u^2=(w-z)^2\ge 0$。所以 $u^2\le 2v$。

反过来，假设 u 和 v 是实数，且 $u^2\le 2v$。那么 $p=wz=\frac{1}{2}(u^2-v)$ 亦是实数。由于

$$(t-w)(t-z)=t^2-ut+p,$$

w 和 z 恰好是二次方程 $t^2-ut+p=0$ 的两个根，而这方程的系数都是实数。它的判别式是

$$u^2-4p=u^2-2(u^2-v)=2v-u^2\ge 0,$$

所以两个根都是实数。因此 w 和 z 是实数，等价关系（equivalence）的证明至此完成。

> **想一想** 为甚么单靠“u 和 v 是实数”并不足够?

因为一对共轭复数(conjugate pair)的和与平方和同样是实数。例如 $w=1+2\mathrm{i}$、$z=1-2\mathrm{i}$ 给出 $u=2$ 和 $v=-6$，两者都是实数，但 $u^2=4>-12=2v$。这条不等式正正就是用来排除非实数的共轭对。

第 (ii) 部分

化为三次方程。第一条方程说的是 $u=w+z$。记 $v=w^2+z^2$，第二条方程说 $v=u^2-\frac{2}{3}$，所以

$$wz=\tfrac{1}{2}(u^2-v)=\tfrac{1}{3}.$$

对于立方，我们用标准恒等式

$$w^3+z^3=(w+z)^3-3wz(w+z)=u^3-u.$$

因此第三条方程变成 $u^3-u-\lambda u=-\lambda$，即

$$u^3-(1+\lambda)u+\lambda=0.$$

代入 $u=1$ 得 $1-1-\lambda+\lambda=0$，所以 $u-1$ 是一个因式，而

$$u^3-(1+\lambda)u+\lambda=(u-1)(u^2+u-\lambda).$$

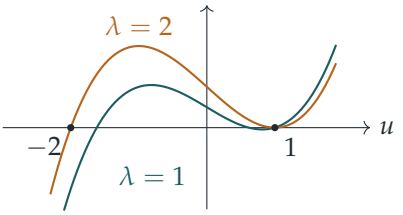
数算根的个数。由于 $\lambda>0$，二次因式的判别式 $1+4\lambda>0$。所以它有两个相异实根：

$$u=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\lambda}}{2}.$$

其中一个根等于 1，当且仅当 $1^2+1-\lambda=0$，即 $\lambda=2$。所以：

- 若 $\lambda\neq 2$，u 的可能值为 1 及 $\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{1+4\lambda}\right)$：共三个相异的值，全部是实数；
- 若 $\lambda=2$，三次式为 $(u-1)^2(u+2)$，只有两个值：$u=1$ 和 $u=-2$。

这些值每一个都确实可以出现：给定 u，取 w 和 z 为 $t^2-ut+\frac{1}{3}=0$ 的根。那么 $w+z=u$ 且 $wz=\frac{1}{3}$，把上面的步骤倒过来推，便可知三条方程全部成立。所以例外的值是 $\lambda=2$。



这幅草图（已在垂直方向缩放）显示 $u^3-(1+\lambda)u+\lambda$ 在 $\lambda=1$ 时的图像，与横轴有三个分开的交点；以及在 $\lambda=2$ 时的图像，曲线在 $u=1$ 处刚好与横轴相切。

w 和 z 是否必然是实数? 不是。由于 u 是实数，而 $v=u^2-\frac{2}{3}$ 也是实数，第 (i) 部分告诉我们：w 和 z 是实数当且仅当 $u^2\le 2v=2u^2-\frac{4}{3}$，即当且仅当 $u^2\ge\frac{4}{3}$。无论 λ 取何值，根 $u=1$ 都存在，而 $1<\frac{4}{3}$，所以它总是给出非实数的 w 和 z。

具体来说，$u=1$ 给出 $t^2-t+\frac{1}{3}=0$，所以

$$w=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}},\qquad z=\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}.$$

验证一下：$w+z=1=u$；$wz=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$，所以 $w^2+z^2=1-\frac{2}{3}=u^2-\frac{2}{3}$；而 $w^3+z^3=u^3-3wz\,u=1-1=0$，所以对任何 $\lambda>0$ 都有 $w^3+z^3-\lambda u=-\lambda$。这是一个反例（counterexample）：$u$ 的三个值全是实数，但 w 和 z 未必是实数。

验算

- 当 $\lambda=1$ 时，u 的值为 1 及 $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})\approx 0.618,\ -1.618$，每一个都满足 $u^3-2u+1=0$。
- 当 $\lambda=2$ 时，三次式 u^3-3u+2 在 $u=-2$ 处为零（$-8+6+2=0$），而它及其导数（derivative）$3u^2-3$ 在 $u=1$ 处都为零，证实了这是重根（double root）。
- 用电脑对大量 λ 值进行检查：由每个 u 构造出 w 和 z，确认三条方程在舍入误差范围内成立；检查亦发现除了 $\lambda=2$ 以外，u 都有三个相异的值。

常见错误

- 在第 (i) 部分只证明了一个方向。逆命题需要积 wz 是实数，而这正是用到 v 是实数的地方。
- 忘记检查二次因式的根是否与 1 不同，因而漏掉了例外值 $\lambda=2$。
- 以为 u 是实数，w 和 z 就必定是实数。w 和 z 的实值对称函数同样可以来自一对共轭复数。

STEP 之外

一对数（或任何一组数）由其对称函数决定——这个想法是对称多项式（symmetric polynomial）理论的起点：任何关于 w 和 z 的对称多项式都可以用 $w+z$ 和 wz 表示，而牛顿（Newton）恒等式则把 w^3+z^3 这类幂和（power sum）与它们联系起来。同样的推理，配

合判别式，可以判定一个实系数多项式的根何时全是实数。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可视化复分析》）是学习复数的绝佳良伴，而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）则把对称多项式的讨论推得更远。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。