详细解答

STEP III 2015，第 5 题

纯数学 • 以递降法证明无理性

> **STEP III 2015，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q5

本题在 *Beyond STEP* 第 1.3 节最小反例中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch01/well-ordering.html

关键思路

这是无穷递降法（infinite descent）的证明：假如 $\sqrt{2}$ 是有理数（rational），那么必定存在一个最小的正整数，使 $\sqrt{2}$ 乘以它之后变成整数；然后我们构造出一个更小的这样的数。乘以 $\sqrt{2}-1$ 正好能做到这一点，因为它是介乎 0 与 1 之间的数，而且乘了之后仍留在该集合之内。对于 2 的立方根（cube root），同一招数需要一个同时照顾 $2^{2/3}$ 的集合，这就是题目为何先要求你把这两个数联系起来。

解答

第 (i) 部分

第 3 步。根据第 1 步的假设，对某些整数 p 和 q（$q \neq 0$），有 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$。由于 $\sqrt{2} > 0$，我们可取 p 和 q 皆为正数。于是

$$q\sqrt{2} = p$$

是整数，而 q 是正整数，所以 $q \in S$。因此 S 非空。

第 5 步。由于 $k \in S$，数 $m = k\sqrt{2}$ 是整数。关于 $n = (\sqrt{2}-1)k$，我们需要验证两件事。

- n 是正整数：$n = k\sqrt{2} - k = m - k$ 是两个整数之差，而且由于 $k > 0$ 及 $\sqrt{2} > 1$，有 $n > 0$。

- $n\sqrt{2}$ 是整数：
$$n\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)k\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2} = 2k - m,$$
同样是两个整数之差。

所以 $(\sqrt{2}-1)k \in S$。

第 6 步。由于 $1 < \sqrt{2} < 2$（因为 $1 < 2 < 4$），我们有 $0 < \sqrt{2}-1 < 1$，因此由 $k > 0$ 得
$$(\sqrt{2}-1)k < k.$$
于是第 5 步给出了 S 中一个比 k 小的正整数，与第 4 步中选取 k 为 S 的最小元素相矛盾（contradiction）。（第 4 步是合理的，因为每个非空的正整数集合都有最小元素，而第 3 步已证明 S 非空。）整个论证唯一的假设是第 1 步，所以它必定是错的：$\sqrt{2}$ 是无理数（irrational）。

第 (ii) 部分

记 $a = 2^{1/3}$，则 $a^2 = 2^{2/3}$ 及 $a^3 = 2$。

等价性（equivalence）。若 a 是有理数，则 a^2 作为有理数的乘积亦是有理数。反过来，若 a^2 是有理数，则由于 $a^2 \neq 0$，
$$a = \frac{a^3}{a^2} = \frac{2}{a^2}$$
是有理数。所以 $2^{1/3}$ 是有理数当且仅当 $2^{2/3}$ 是有理数。

无理性。用反证法，假设 a 是有理数。根据等价性，a^2 亦是有理数。定义 T 为所有使 na 与 na^2 同时为整数的正整数 n 所组成的集合。

> ? **想一想** 为何不直接照搬第 (i) 部分，取 $S = \{n : na \text{ 是整数}\}$?

在第 (i) 部分中，验证 $(\sqrt{2}-1)k \in S$ 时需要 $k(\sqrt{2})^2 = 2k$ 是整数，而这是自动成立的。在这里，把 $(a-1)k$ 乘以 a 得到 $ka^2 - ka$，但条件“ka 是整数”并没有告诉我们 ka^2 是整数。所以我们把这一点写进集合的定义之中，而这正是需要本部分前半的地方。

T 非空。记 $a = \frac{p}{q}$，其中 p、q 为正整数。则 $q^2 a = pq$ 及 $q^2 a^2 = p^2$ 都是整数，所以 $q^2 \in T$。

递降。设 k 为 T 的最小元素，则 $u = ka$ 及 $v = ka^2$ 都是整数。考虑 $n = (a-1)k$。

- $n = u - k$ 是整数，而且由于 $a > 1$（因为 $1^3 < 2$），有 $n > 0$。
- $na = ka^2 - ka = v - u$ 是整数。
- 利用 $a^3 = 2$，$na^2 = ka^3 - ka^2 = 2k - v$ 是整数。

所以 $n \in T$。但 $a < 2$（因为 $2^3 = 8 > 2$），所以 $0 < a - 1 < 1$，从而 $n = (a-1)k < k$，与 k 的极小性（minimality）相矛盾。因此 $2^{1/3}$ 是无理数，而根据等价性，$2^{2/3}$ 亦是无

理数。

验算

- 在一个“差一点”的例子上试试递降。分数 $\frac{7}{5}$ 很接近 $\sqrt{2}$；第 5 步中的映射 $(k,m)\mapsto(m-k,\,2k-m)$ 把 $(5,7)$ 映到 $(2,3)$，而 $3^2-2\cdot 2^2=1=-(7^2-2\cdot 5^2)$。量 m^2-2k^2 只会改变正负号，所以假如它等于 0（即 $m=k\sqrt{2}$），它会一直保持为 0，而 k 却不断变小，这是不可能的。
- 数值上，$\sqrt{2}-1\approx 0.414$ 及 $2^{1/3}-1\approx 0.260$，两者都严格介乎 0 与 1 之间，正如递降所需。
- 用电脑搜索所有 $n\le 2\times 10^5$，找不到任何 n 使 $2n^2$ 为完全平方数，亦找不到任何 n 使 $2n^3$ 或 $4n^3$ 为完全立方数。

常见错误

- 忘记证明 $(\sqrt{2}-1)k$ 是正数：S 只包含正整数，所以这一步是必需的。
- 在第 (ii) 部分中，使用只以 na 定义的集合，然后毫无理据地断言 ka^2 是整数。
- 没有说明最小元素 k 为何存在：这需要 S（或 T）非空，而这正是第 3 步的目的。

STEP 之外

这个论证其实关乎正整数的良序性（well-ordering），也就是归纳法（induction）背后的原理，而且它可以推广：若 $\sqrt[r]{N}$ 不是整数，则它是无理数。要看出这一点，可取所有使 $n\alpha, n\alpha^2,\ldots,n\alpha^{r-1}$ 全都是整数的 n 所组成的集合，再把其最小元素乘以 $\alpha-\lfloor\alpha\rfloor$，而这个数严格介乎 0 与 1 之间。在第一个代数课程中，这会变成以下命题：整数构成一个整闭（integrally closed）环——整数系数首一多项式（monic polynomial）的有理根必定是整数。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是进一步认识整数及其性质的绝佳读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。