详细解答

STEP III 2015，第 4 题

纯数学 · 三次方程的根

STEP III 2015，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s3-q4

关键思路

第 (iii) 部分的三个条件看似一道三角谜题，但每一个其实都是某个量的虚部（imaginary part）：当 $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ 时，$r_k^n \sin(n\theta_k)$ 正是 z_k^n 的虚部。因此，这些条件表示三个复数的幂和（power sum）S_1、S_2、S_3 都是实数。第 (ii) 部分把实数幂和转化为一个实系数（real coefficients）三次方程（cubic），而第 (i) 部分则随即给我们一个实根（real root）。

解答

第 (i) 部分

对实数 x，设 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$；这是一个连续（continuous）实函数。令 $R = 1 + |a| + |b| + |c|$。当 $x \geq R$ 时，有 $x \geq 1$，所以 $|x| \leq x^2$ 及 $1 \leq x^2$，从而 $|ax^2 + bx + c| \leq (|a| + |b| + |c|)x^2$。因此

$$f(x) \geq x^3 - (|a| + |b| + |c|)x^2 = x^2(x - |a| - |b| - |c|) > 0.$$

同理，当 $x \leq -R$ 时，得 $f(x) \leq -|x|^2(|x| - |a| - |b| - |c|) < 0$。所以 $f(-R) < 0 < f(R)$，由介值定理（intermediate value theorem）可知 f 在 $-R$ 与 R 之间有一个零点。这个零点就是 $(*)$ 的一个实根。

（等价的说法：实多项式（polynomial）的非实根必定成共轭（conjugate）对出现，而三个根不可能全部两两配对。）

第 (ii) 部分

由于 z_1、z_2、z_3 是方程的根，

$$z^3 + az^2 + bz + c = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3),$$

比较系数（comparing coefficients）得

$$a = -(z_1 + z_2 + z_3), \qquad b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1, \qquad c = -z_1z_2z_3.$$

所以 $a = -S_1$。把和平方，得 $S_1^2 = S_2 + 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = S_2 + 2b$，故

$$a = -S_1, \qquad b = \tfrac{1}{2}(S_1^2 - S_2).$$

至于 c，与其展开 S_1^3，不如利用每个根都满足方程这一事实：对 $k = 1, 2, 3$，有 $z_k^3 + az_k^2 + bz_k + c = 0$。把这三条方程相加，得

$$S_3 + aS_2 + bS_1 + 3c = 0.$$

代入 a 和 b，再乘以 2：

$$\begin{aligned} 6c &= -2S_3 + 2S_1S_2 - S_1(S_1^2 - S_2) \\ &= -S_1^3 + 3S_1S_2 - 2S_3, \end{aligned}$$

即为所求。

第 (iii) 部分

对 $k = 1, 2, 3$，定义 $z_k = r_k e^{i\theta_k}$。由棣美弗定理（de Moivre's theorem），$z_k^n = r_k^n(\cos n\theta_k + i \sin n\theta_k)$，所以题目给出的三个条件恰好表示

$$\operatorname{Im} S_1 = \operatorname{Im} S_2 = \operatorname{Im} S_3 = 0,$$

其中 S_1、S_2、S_3 是 z_1、z_2、z_3 的幂和，定义与第 (ii) 部分相同。所以 S_1、S_2、S_3 全是实数。

? **想一想** 第 (ii) 部分是从一个三次方程出发的。这里的三次方程在哪里?

我们自己构造它：以 $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 + az^2 + bz + c$ 定义 a、b、c。那么 z_1、z_2、z_3 就是这个三次方程的根，于是第 (ii) 部分适用，得

$$a = -S_1, \qquad b = \tfrac{1}{2}(S_1^2 - S_2), \qquad c = \tfrac{1}{6}(-S_1^3 + 3S_1S_2 - 2S_3),$$

它们全是实数。由第 (i) 部分，这个三次方程有一个实根，而它的根只有 z_1、z_2、z_3，所以某个 z_k 是实数。由于 $r_k > 0$，$z_k = r_k e^{i\theta_k}$ 是实数当且仅当 $\sin\theta_k = 0$，即 θ_k 是 π 的整数倍；在 $-\pi < \theta_k < \pi$ 范围内，唯一这样的值是 $\theta_k = 0$。所以至少有一个 k 使 $\theta_k = 0$。

现在设 $\theta_1 = 0$，于是 $z_1 = r_1$ 是非零实数。那么

$$z_2 + z_3 = S_1 - z_1 \quad 及 \quad z_2 z_3 = \frac{-c}{z_1}$$

都是实数。因此 z_2 和 z_3 是二次方程（quadratic）$z^2 - (z_2 + z_3)z + z_2 z_3 = 0$ 的根，而这个方程的系数都是实数。分两种情况。

- 若两根是非实数，则它们互为共轭复数：$z_3 = \overline{z_2} = r_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}$。由于 $-\theta_2$ 同样位于 $(-\pi, \pi)$ 内，而在这个区间内辐角（argument）是唯一的，所以 $\theta_3 = -\theta_2$（且 $r_3 = r_2$）。
- 若两根是实数，则与上面完全相同的推理（每个根的模（modulus）为正，辐角位于 $(-\pi, \pi)$ 内）给出 $\theta_2 = \theta_3 = 0$，所以同样有 $\theta_2 = -\theta_3$。

无论哪种情况，都有 $\theta_2 = -\theta_3$，即为所求。

验算

- 用根 $1, 2, 3$ 验证第 (ii) 部分：$S_1 = 6$、$S_2 = 14$、$S_3 = 36$，而 $-216 + 252 - 72 = -36 = 6c$，其中 $c = -6$，正与 $(z-1)(z-2)(z-3)$ 相符。
- 反方向验证第 (iii) 部分：当 $\theta_1 = 0$、$\theta_3 = -\theta_2$ 及 $r_3 = r_2$ 时，每个和的第二项与第三项互相抵消，而第一项为零，所以三个条件全部成立。用电脑从数千个随机起点以数值方法求解这三个条件，找到的解全都是一个角为零、另外两个角互为相反数。

常见错误

- 在第 (i) 部分，未加论证便说“三次曲线必定穿过轴”；$|x|$ 很大时的变号需要一行推理来支持。
- 在第 (iii) 部分，忘记 $\theta_k = \pm\pi$ 同样会令 z_k 成为实数；正是开区间 $(-\pi, \pi)$ 排除了这个可能。
- 只从共轭的情况得出 $\theta_2 = -\theta_3$，却忽略了 z_2、z_3 都是实数的情况。

STEP 之外

多项式的系数是其根的基本对称函数（elementary symmetric functions），而第 (ii) 部分的恒等式正是把它们与幂和联系起来的牛顿（Newton）恒等式（Newton's identities）的头几条。大学的第一门代数课会证明：根的任何对称多项式（symmetric polynomial）都可以写成基本对称函数的多项式，而这正是伽罗瓦理论（Galois theory）的起点。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）是阅读这方面内容的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。