详细解答

STEP III 2015，第 3 题

纯数学 · 极坐标曲线与面积

STEP III 2015，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s3-q3

关键思路

曲线 $r = a\sec\theta$ 其实就是直线 $x = a$，因为 $r\cos\theta = x$。因此 $r - a\sec\theta$ 量度的是：沿着从原点出发、角度为 θ 的射线，一点与该射线和直线交点之间的距离；而方程表示这个距离等于 b。这正是蚌线（conchoid）的定义，其中定点就是极点（pole）。至于作图，可把绝对值（modulus）拆开成 $r = a\sec\theta + b$ 和 $r = a\sec\theta - b$，再逐一考虑哪些 θ 值使 $r \geq 0$。

解答

全题中，$\sec\theta$ 在 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ 时无定义，因此这些角度须排除。去掉绝对值后，$(*)$ 表示

$$r = a\sec\theta + b \qquad \text{或} \qquad r = a\sec\theta - b,$$

而无论哪种情况，我们都需要 $r \geq 0$。

第 (i) 部分

为何 $\sec\theta > 0$。假设 $\sec\theta < 0$。由 $|\cos\theta| \leq 1$ 得 $\sec\theta \leq -1$，所以 $a\sec\theta \leq -a$。于是 r 的两个可能值都满足

$$r = a\sec\theta \pm b \leq -a + b < 0,$$

这里用了 $a > b$。这与 $r \geq 0$ 矛盾，所以每个满足 $(*)$ 的点都有 $\sec\theta > 0$，即 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$。

蚌线。取 A 为极点 O，L 为直线 $x = a$（极坐标形式为 $r\cos\theta = a$，即 $r = a\sec\theta$），并取 $d = b$。注意由于 $a > 0$，A 不在 L 上。

设 P 满足 $(*)$，其极角为 θ，所以 $\cos\theta > 0$。直线 OP 不与 L 平行，它与 L 相交于同一射线上

的点 Q, 且 $OQ = a\sec\theta$, 即以直角坐标（Cartesian coordinates）表示为 $Q = (a,\, a\tan\theta)$。由于 O、Q 和 P 都在从 O 出发的同一条射线上，与 O 的距离分别为 $a\sec\theta$ 和 r，

$$PQ = |r - a\sec\theta| = b.$$

所以沿着一条经过 $A = O$ 的直线量度，P 与 L 的距离为 b：它位于以此 L、A 及 $d = b$ 构成的尼科梅德斯（Nicomedes）蚌线上。

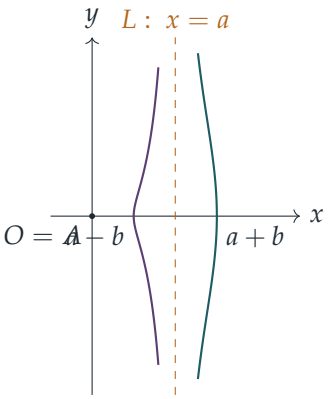
（反过来，该蚌线上的每一点都满足 $(*)$：在任何经过 O 并与 L 相交于 Q 的直线上，与 Q 距离为 b 的两点，沿射线 OQ 与 O 的距离为 $a\sec\theta \pm b$，由于 $a\sec\theta \geq a > b$，两者皆为正数。所以轨迹就是整条蚌线。）

作图。在直角坐标中，$x = r\cos\theta = a \pm b\cos\theta$，而 $y = r\sin\theta$。把 $r - a\sec\theta = \pm b$ 乘以 $\cos\theta$，得 $x - a = \pm b\cos\theta = \pm bx/r$，所以曲线为

$$(x-a)^2(x^2+y^2) = b^2x^2.$$

曲线有两个分支（branch），两者都关于 x 轴对称（以 $-\theta$ 代替 θ 即可见），而当 $\theta \to \pm\frac{\pi}{2}$ 时 $r \to \infty$，两者都以 L 为渐近线（asymptote）：

- 外分支 $r = a\sec\theta + b$，其中 $x = a + b\cos\theta \in (a,\, a+b]$，与轴相交于 $(a+b, 0)$；
- 内分支 $r = a\sec\theta - b$，其中 $x = a - b\cos\theta \in [a-b,\, a)$，与轴相交于 $(a-b, 0)$，该点位于 O 的右方。



（图中取 $a = 2$、$b = 1$：外分支以蓝绿色表示，内分支以梅紫色表示。）

第 (ii) 部分

现在 $a < b$。再逐一检查两种情况，看看何时 $r \geq 0$。

- $r = a\sec\theta + b$。若 $\sec\theta > 0$，它必为正数：这就是与之前相同、位于 L 右方的外分支。若 $\sec\theta < 0$，则 $r \geq 0$ 当且仅当 $-a\sec\theta \leq b$，即 $|\sec\theta| \leq b/a$，即 $\cos\theta \leq -a/b$。

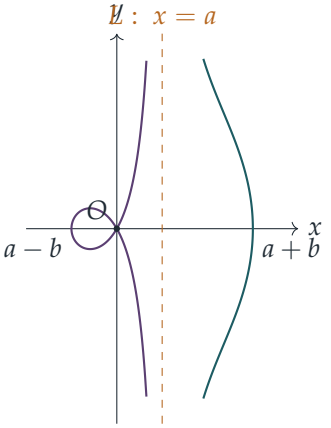
► $r = a\sec\theta - b$。若 $\sec\theta < 0$，它为负数，所以没有点。若 $\sec\theta > 0$，则 $r \geq 0$ 当且仅当 $\sec\theta \geq b/a$，即 $0 < \cos\theta \leq a/b$。

设 $\alpha = \arccos(a/b)$，由于 $0 < a/b < 1$，它位于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之内。

想一想 $\sec\theta < 0$ 的那一部分是甚么样子?

它是 $r = b + a\sec\theta$，其中 $\cos\theta \leq -a/b$，即 $\pi - \alpha \leq |\theta| \leq \pi$。在两端，$\cos\theta = -a/b$ 给出 $r = b - b = 0$，所以它在原点开始，也在原点结束。在 $\theta = \pi$ 时得 $r = b - a$，即负 x 轴上的点 $(a - b, 0)$。在两端之间 $r > 0$，而曲线关于 x 轴对称，所以这部分是原点左方的一个闭环，位于 $a - b \leq x \leq 0$ 之内（因为 $x = a + b\cos\theta$）。

内分支 $r = a\sec\theta - b$（其中 $\alpha \leq |\theta| < \frac{\pi}{2}$）同样从原点开始（该处 $\cos\theta = a/b$），并当 $|\theta| \to \frac{\pi}{2}$ 时伸向渐近线 L，一直保持在 $0 \leq x < a$ 之内。所以内分支与闭环合起来构成一条在 O 自身相交的曲线，在该处的切线方向为 $\theta = \pm\alpha$。



（图中取 $a = 1$、$b = 2$，所以 $\alpha = \frac{\pi}{3}$。外分支以蓝绿色表示；内分支连同闭环以梅紫色表示。）

$a = 1$、$b = 2$ 时闭环的面积。此时 $\cos\theta \leq -\frac{1}{2}$ 表示 $\frac{2\pi}{3} \leq |\theta| \leq \pi$，而在闭环上 $r = 2 + \sec\theta$。当 θ 走遍这个范围时，射线恰好扫过闭环一次，所以面积为 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$。利用关于 x 轴的对称性，我们取上半部分 $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$ 的两倍：

$$\begin{aligned} \text{面积} &= 2\cdot\frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi}(2+\sec\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \int_{2\pi/3}^{\pi}\left(4 + 4\sec\theta + \sec^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \Big[4\theta + 4\ln|\sec\theta + \tan\theta| + \tan\theta\Big]_{2\pi/3}^{\pi}. \end{aligned}$$

题目给出的 $\sec\theta$ 的原函数（antiderivative）在此适用，因为区间不包含 $\frac{\pi}{2}$。在 $\theta = \pi$：$\sec\theta = -1$，$\tan\theta = 0$，所以括号内的值为 $4\pi + 4\ln 1 + 0 = 4\pi$。在 $\theta = \frac{2\pi}{3}$：$\sec\theta = -2$，

$\tan\theta = -\sqrt{3}$，所以括号内的值为 $\frac{8\pi}{3} + 4\ln(2+\sqrt{3}) - \sqrt{3}$。相减，得

$$\text{闭环的面积} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} - 4\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

验算

- 数值上，面积为 $4.1888 + 1.7321 - 5.2678 \approx 0.6530$。它是正数，理应如此；而且相比能容纳闭环的矩形 $-1 \le x \le 0$、$|y| \le 0.45$（面积为 0.9）也较小。直接以数值方法在 $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ 上积分 $\frac{1}{2}(2+\sec\theta)^2$，同样得到 0.65301。
- 闭环经过 O 和 $(-1,0)$：在 $\theta = \frac{2\pi}{3}$，$r = 2 - 2 = 0$；在 $\theta = \pi$，$r = 2 - 1 = 1$。
- 在第 (i) 部分的曲线上取一点，例如 $a = 2$、$b = 1$、$\theta = \frac{\pi}{4}$：则 $r = 2\sqrt{2} + 1$，而射线与 L 相交于 $(2,2)$，与 O 的距离为 $2\sqrt{2}$，所以该点在交点之外 $1 = b$ 的位置。

常见错误

- 忘记条件 $r \ge 0$。正是这个条件迫使第 (i) 部分中 $\sec\theta > 0$，也决定了第 (ii) 部分中闭环的 θ 范围。
- 在 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 上积分闭环，即穿过渐近线方向，而不是从 $r = 0$ 的 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 开始。
- 在第二象限处理 $\ln|\sec\theta + \tan\theta|$ 时出现正负号错误；该象限中 $\sec\theta$ 和 $\tan\theta$ 皆为负数。

STEP 之外

蚌线由尼科梅德斯约于公元前 200 年发明，用来三等分角和求立方根；这些问题单靠直尺和圆规是不可能解决的，而不可能性的证明来自域论（field theory），在大学第一个代数课程中便会接触到（见 Allenby，*Rings, Fields and Groups*《环、域与群》）。第 (ii) 部分中在原点的自交点是一个结点（node），是代数曲线（algebraic curve）上奇点（singular point）的一个例子，这里的代数曲线是四次曲线 $(x-a)^2(x^2+y^2) = b^2x^2$。更多 STEP 风格的曲线作图题，可参阅 Siklos，*Advanced Problems in Mathematics*《高等数学问题》。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。