详细解答

STEP III 2015，第 2 题

纯数学 · 分析学

> **STEP III 2015，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/15-s3-q2

本题在 *Beyond STEP* 第 2.1 节“最终”是甚么意思中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch02/eventually.html

关键思路

关系 $(s_n) \leq (t_n)$ 的意思是“最终 (eventually) $s_n \leq t_n$”：我们可以不理会前面任意有限多项。因此，要证明一个命题为真，就要指出一个位置 m，保证由此以后不等式 (inequality) 必定成立；要证明一个命题为假，则要找出一对数列 (sequence)，使任何 m 的选择都行不通。时刻问自己：这个结果是从哪一个 n 开始成立的？

解答

第 (i) 部分

正确。对正整数 n，我们可以除以 $n > 0$，所以

$$1000n \leq n^2 \iff 1000 \leq n.$$

因此只要 $n \geq 1000$，便有 $1000n \leq n^2$，取 $m = 1000$ 即可。（更小的 m 都不行，因为 $1000 \cdot 999 > 999^2$。）

第 (ii) 部分

错误。陷阱在于“并非最终 $s_n \le t_n$”只告诉我们 $s_n > t_n$ 对无限多个 n 成立，而不是最终成立。两个数列可以不断互相超越。取

$$s_n = 2 + (-1)^n, \qquad t_n = 2,$$

于是 s_n 依次为 $1, 3, 1, 3, \ldots$，而两个数列的每一项都是正数。

- $(s_n) \le (t_n)$ 不成立：无论提出哪个正整数 m，总有偶数 $n \ge m$，而对这个 n 有 $s_n = 3 > 2 = t_n$。
- $(t_n) \le (s_n)$ 也不成立：无论提出哪个 m，总有奇数 $n \ge m$，而对这个 n 有 $t_n = 2 > 1 = s_n$。

所以命题的假设成立，但结论不成立。

第 (iii) 部分

正确。根据假设，存在正整数 m_1，使得对所有 $n \ge m_1$ 都有 $s_n \le t_n$；又存在正整数 m_2，使得对所有 $n \ge m_2$ 都有 $t_n \le u_n$。设

$$m = \max(m_1, m_2).$$

若 $n \ge m$，则 $n \ge m_1$ 且 $n \ge m_2$，所以两个不等式在 n 处都成立，得

$$s_n \le t_n \le u_n.$$

因此只要 $n \ge m$ 便有 $s_n \le u_n$，这正是 $(s_n) \le (u_n)$。

> ? **想一想** 为甚么不直接取 $m = m_1$，或者 $m = m_1 + m_2$?

取 $m = m_1$ 行不通，因为当 $m_1 \le n < m_2$ 时，我们对 t_n 与 u_n 的大小关系一无所知。我们需要 n 同时越过两个门槛（threshold），而 $\max(m_1, m_2)$ 是能保证这一点的最小选择。（$m_1 + m_2$ 也可以，但不必要地大。）

第 (iv) 部分

正确，取 $m = 4$。一个简短的表格显示应从哪里开始：

n	1	2	3	4	5	6
n^2	1	4	9	16	25	36
2^n	2	4	8	16	32	64

不等式在 $n = 1, 2$ 时成立，在 $n = 3$ 时不成立，从 $n = 4$ 起又再成立。所以 $m = 4$ 是最小的可能选择，我们用归纳法（induction）证明对所有 $n \geq 4$ 都有 $n^2 \leq 2^n$。

基本情况（*base case*）。当 $n = 4$ 时，$n^2 = 16 = 2^4$。

归纳步骤（*inductive step*）。假设 $n \geq 4$ 且 $n^2 \leq 2^n$。由于 $n \geq 3$，有 $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geq 2 > 0$，所以 $2n + 1 < n^2$。因此

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &< n^2 + n^2 && \text{因为} 2n+1 < n^2 \\ &= 2n^2 \\ &\leq 2 \cdot 2^n && \text{由归纳假设（inductive hypothesis）} \\ &= 2^{n+1}.\end{aligned}$$

所以结果对 n 成立可推出对 $n+1$ 成立，由归纳法，对每个 $n \geq 4$ 都有 $n^2 \leq 2^n$。因此 $(n^2) \leq (2^n)$，取 $m = 4$。

想一想 归纳法究竟在哪一步需要 n 足够大?

只在 $2n + 1 < n^2$ 这一步，它需要 $n \geq 3$。这就是归纳法不能从 $n = 1$ 开始的原因：由 $n = 2$ 推到 $n = 3$ 的一步要用到 $5 < 4$，这是错的，而事实上 $3^2 > 2^3$。

验算

- 第 (i) 部分：当 $n = 1000$ 时两边都等于 10^6；当 $n = 999$ 时，$999\,000 > 998\,001$。
- 第 (iv) 部分：用电脑对 4 至 2000 的每个 n 检验 $n^2 \leq 2^n$，结果都成立；上面的表格亦确认了 $n = 3$ 时不成立。要感受 2^n 胜出得有多快：$20^2 = 400$，但 $2^{20} = 1\,048\,576$。
- 第 (ii) 部分：无论你尝试哪个 m，都会被下一个偶数 n（对其中一个次序）及下一个奇数 n（对另一个次序）推翻。

常见错误

- 把“并非最终 $\leq$”当成“最终 $>$”。“存在 m, 使得对所有 $n \geq m$……”的否定 (negation) 是“对每个 m，都存在某个 $n \geq m$ 使得 $s_n > t_n$”。
- 在 (iv) 中从 $n = 1$ 或 $n = 2$ 开始归纳：归纳步骤在那里确实不成立。
- 在 (iii) 中，两个假设都用同一个字母 m，仿佛两个门槛必须相同。

STEP 之外

这里的关系正是贯穿整个实分析（real analysis）的“最终”量词（quantifier）：一个数列收敛（converges），是指对每一个容许误差，它最终都落在其极限的该误差范围之内。第 (ii) 部分显示，与实数上的次序不同，数列的这种次序并不是全序（total order）：两个数列未必可以互相比较。电脑科学家在大 O 记号（big-O notation）中使用同一个概念，而 (iv) 就是“指数函数最终胜过多项式”这个熟悉的事实。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是一本亲切易读的书，可以从中看到这类量词论证如何被系统化。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。