详细解答

STEP III 2015，第 13 题

概率与统计 • 均匀分布变量的函数

STEP III 2015，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s3-q13

关键思路

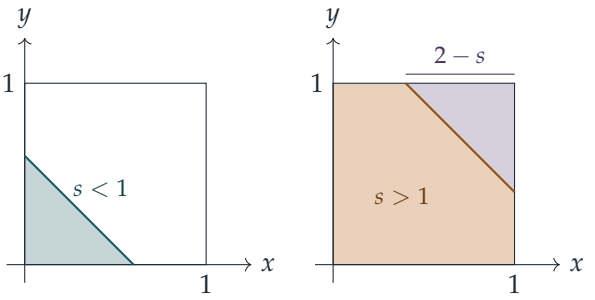
由于 X 与 Y 互相独立（independent），且都在 $[0,1]$ 上均匀分布（uniform distribution），数对 (X,Y) 便在单位正方形上均匀分布，因此关于 X 和 Y 的每一个概率，其实就是一个面积。像 $X+Y \le s$ 或 $Y \le rX$ 这类事件，都是用一条直线把正方形切开，而直线一侧的面积不是一个三角形，就是正方形减去一个三角形。之后，只要把 $1/(X+Y)$ 和 $X/(X+Y)$ 的事件改写成我们已经量度过的事件，就能得出它们的分布。

解答

全文中，(X,Y) 在面积为 1 的单位正方形 $[0,1]^2$ 上均匀分布，所以对正方形内任何区域 A，$\mathrm{P}((X,Y) \in A)$ 都等于 A 的面积。

第 (i) 部分

设 $S = X+Y$，其取值范围为 $[0,2]$，并设 $F(s) = \mathrm{P}(S \le s)$。事件 $S \le s$ 就是正方形中位于直线 $x+y=s$ 上或其下方的部分。



若 $0 \le s \le 1$，该直线与两轴相交于 $(s,0)$ 和 $(0,s)$，其下方的区域是一个两直角边长均为 s 的等腰直角三角形。若 $1 \le s \le 2$，则直线上方的区域是位于角落 $(1,1)$ 的三角形；它的两条直角边由直线延伸至该角，长度为 $1-(s-1)=2-s$。因此

$$F(s) = \mathrm{P}(X+Y \le s) = \begin{cases} 0 & s < 0, \\ \frac{1}{2}s^2 & 0 \le s \le 1, \\ 1 - \frac{1}{2}(2-s)^2 & 1 \le s \le 2, \\ 1 & s > 2. \end{cases}$$

中间两条公式在 $s=1$ 时一致（都等于 $\frac{1}{2}$），这是理所当然的。

第 (ii) 部分

设 $T = 1/S$。由于 $0 < S \le 2$（$S=0$ 的概率为零），T 的取值范围为 $[\frac{1}{2}, \infty)$。对 $t > 0$，因为 $s \mapsto 1/s$ 在 $s > 0$ 上是递减的，

$$\mathrm{P}(T \le t) = \mathrm{P}\left(S \ge \tfrac{1}{t}\right) = 1 - F\left(\tfrac{1}{t}\right),$$

这里用到 S 是连续随机变量（continuous random variable），所以 $\mathrm{P}(S = 1/t) = 0$。

> **想一想** 应该用 F 的哪一条公式？这取决于 $1/t$ 落在哪里，而不是 t 落在哪里。

若 $t \ge 1$，则 $0 < 1/t \le 1$，所以用第一个分支：$\mathrm{P}(T \le t) = 1 - \frac{1}{2}t^{-2}$。若 $\frac{1}{2} \le t \le 1$，则 $1 \le 1/t \le 2$，所以用第二个分支：$\mathrm{P}(T \le t) = \frac{1}{2}\left(2 - t^{-1}\right)^2$。而当 $t < \frac{1}{2}$ 时，$\mathrm{P}(T \le t) = 0$。

求导便得到概率密度函数（probability density function）。当 $t \ge 1$，

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 - \tfrac{1}{2}t^{-2}\right) = t^{-3},$$

而当 $\frac{1}{2} \le t \le 1$，由链式法则（chain rule），

$$f(t) = \left(2 - t^{-1}\right) \cdot t^{-2} = 2t^{-2} - t^{-3},$$

其他情况下 $f(t) = 0$。这就是所求的概率密度函数。

至于期望值（expectation），

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\frac{1}{X+Y}\right) = \int_{1/2}^{\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{1/2}^{1} \left(2t^{-1} - t^{-2}\right)\mathrm{d}t + \int_{1}^{\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[2\ln t + t^{-1}\right]_{1/2}^{1} + \left[-t^{-1}\right]_{1}^{\infty} \\ &= (0+1) - (-2\ln 2 + 2) + 1 \\ &= 2\ln 2. \end{aligned}$$

这个反常积分（improper integral）收敛，因为 t^{-2} 在 $[1,\infty)$ 上可积。

第 (iii) 部分

设 $R = Y/X$，其取值范围为 $[0,\infty)$（事件 $X = 0$ 的概率为零）。对 $r \geq 0$，事件 $R \leq r$ 即 $Y \leq rX$：正方形中位于通过原点的直线 $y = rx$ 上或其下方的部分。

若 $0 \leq r \leq 1$，这条直线从正方形右边的 $(1, r)$ 离开，其下方的区域是一个底为 1、高为 r 的三角形，面积为 $\frac{1}{2}r$。若 $r \geq 1$，直线从顶边的 $(1/r, 1)$ 离开，其上方的区域是一个沿顶边的底为 $1/r$、高为 1 的三角形，面积为 $\frac{1}{2r}$。所以

$$H(r) = \mathrm{P}\Big(\frac{Y}{X} \leq r\Big) = \begin{cases} 0 & r < 0, \\ \frac{1}{2}r & 0 \leq r \leq 1, \\ 1 - \dfrac{1}{2r} & r \geq 1. \end{cases}$$

现设 $Z = \dfrac{X}{X+Y} = \dfrac{1}{1+R}$，其取值范围为 $[0,1]$。对 $0 < z \leq 1$，由于 $r \mapsto 1/(1+r)$ 在 $r \geq 0$ 上是递减的，

$$\mathrm{P}(Z \leq z) = \mathrm{P}\Big(1 + R \geq \frac{1}{z}\Big) = \mathrm{P}\Big(R \geq \frac{1-z}{z}\Big) = 1 - H\Big(\frac{1-z}{z}\Big).$$

同样，用哪个分支取决于 $(1-z)/z$ 落在哪里：它不大于 1 当且仅当 $z \geq \frac{1}{2}$。

- 当 $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$：$\mathrm{P}(Z \leq z) = 1 - \dfrac{1-z}{2z} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2z}$。
- 当 $0 < z \leq \frac{1}{2}$：$\mathrm{P}(Z \leq z) = 1 - \Big(1 - \dfrac{z}{2(1-z)}\Big) = \dfrac{z}{2(1-z)}$。

两者在 $z = \frac{1}{2}$ 时都等于 $\frac{1}{2}$。求导（第二条可先写成 $\frac{z}{2(1-z)} = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{1-z} - 1\big)$），得 Z 的概率密度函数为

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-z)^2} & 0 \leq z \leq \frac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2z^2} & \frac{1}{2} \leq z \leq 1, \\ 0 & \text{其他情况.} \end{cases}$$

留意 $g(1-z) = g(z)$：这个概率密度函数关于 $\frac{1}{2}$ 对称。

期望值。 我们无须积分便可直接写出答案。由于 X 与 Y 互相独立且分布相同，数对 (X, Y) 与 (Y, X) 有相同的分布。所以 $\dfrac{X}{X+Y}$ 与 $\dfrac{Y}{X+Y}$ 的期望值相同。两者之和恰好是 1，所以

$$\mathrm{E}\Big(\frac{X}{X+Y}\Big) = \frac{1}{2}.$$

以积分验证。

$$\mathrm{E}(Z) = \int_0^{1/2} \frac{z}{2(1-z)^2}\,\mathrm{d}z + \int_{1/2}^{1} \frac{1}{2z}\,\mathrm{d}z.$$

第二个积分等于 $\frac{1}{2}\big[\ln z\big]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}\ln 2$。第一个积分中，代入 $u = 1 - z$，于是 $\mathrm{d}z = -\mathrm{d}u$，而 $z = 0, \frac{1}{2}$ 分别对应 $u = 1, \frac{1}{2}$：

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{z}{2(1-z)^2}\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} \frac{1-u}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{u} - \ln u\Big]_{1/2}^{1} \\ &= \frac{1}{2}\big(-1 - (-2 + \ln 2)\big) = \frac{1}{2}(1 - \ln 2).\end{aligned}$$

相加得 $\mathrm{E}(Z) = \frac{1}{2}(1 - \ln 2) + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}$，证实了上面的值。

验算

- 每个分布函数（distribution function）都由 0 上升至 1，并在各分支相接处连续：$F(1) = \frac{1}{2}$、$\mathrm{P}(T \le 1) = \frac{1}{2}$、$H(1) = \frac{1}{2}$、$\mathrm{P}(Z \le \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$。由于正方形关于对角线对称，这些值都是 $\frac{1}{2}$。
- 概率密度函数 f 的积分等于 1：$\int_{1/2}^{1}(2t^{-2} - t^{-3})\,\mathrm{d}t = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$，而 $\int_1^\infty t^{-3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$。
- $2\ln 2 \approx 1.386$ 介乎 1 与 2 之间，合乎预期；而且它大于 $1/\mathrm{E}(X+Y) = 1$，正如对凸函数（convex function）$1/s$ 应用琴生不等式（Jensen's inequality）所预测的。直接以数值计算 $\iint (x+y)^{-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 在正方形上的值，得 1.3863。各分布函数以及 $\mathrm{E}(Z) = \frac{1}{2}$ 亦已用电脑模拟证实。

常见错误

- 按 t 或 z 而不是按 $1/t$ 或 $(1-z)/z$ 来选择 F 或 H 的分支，结果把两条公式对调了。
- 忘记 $1/s$ 和 $1/(1+r)$ 是递减的，因而没有把不等号反转：$T \le t$ 的意思是 $S \ge 1/t$。
- 把第 (i) 部分角落三角形的直角边弄错：它是 $2 - s$，不是 $s - 1$。

STEP 之外

把关于 (X, Y) 的陈述化为面积，再对分布函数求导，这是求随机变量函数之分布的一般方法，称为*分布函数法*（distribution function method）。到了大学，还会学到联合概率密度函数的变量代换公式（雅可比行列式，Jacobian），它可以同时处理 $X+Y$ 与 $X/(X+Y)$；特别地，这里 $X+Y$ 的概率密度函数正是两个均匀分布概率密度函数的*卷积*（convolution）。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）涵盖了这两种方法，而 Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率导论》）则有许多同类型的例子。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。