详细解答

STEP III 2015，第 11 题

力学 • 圆周运动

STEP III 2015，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s3-q11

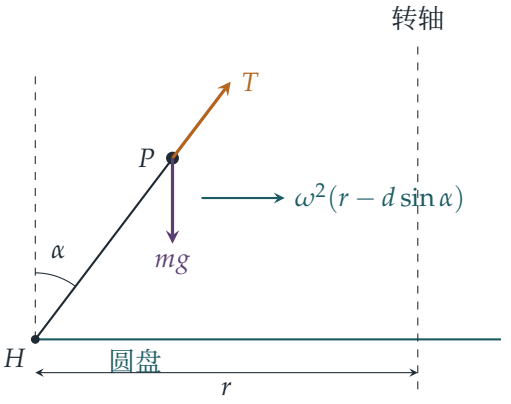
关键思路

轻杆（light rod）没有质量，所以即使它在运动，作用在它上面的力和力矩（moment）都必须完全平衡。在第 (i) 部分，只有两个力作用在杆上，而来自铰链（hinge）的力对铰链没有力矩，所以来自 P 的力必须正正指向铰链。之后，P 就是一个作水平圆周运动的质点，余下的只需分解力（resolving）便可完成。在第 (ii) 部分，两个质点施加的力不一定沿着杆的方向，但对铰链取力矩，仍然可以得到一条关于 β 的方程。

解答

模型。质点是点质量，杆是轻而刚性的，铰链是光滑的，所以它不会对自身的轴（即通过铰链、垂直于包含杆的铅垂平面的水平直线）施加力偶（couple）。在该平面上设立坐标轴，原点位于铰链 H，x 轴水平并指向转轴，y 轴铅垂向上。杆上与 H 距离为 s 的点位于 $(s\sin\theta,\, s\cos\theta)$，其中 θ 是杆与向上铅垂线所成的角，而该点与转轴的水平距离为 $r - s\sin\theta$。

第 (i) 部分



上图画出了作用在 P 上的力：它的重量，以及来自杆的力；我们稍后会证明后者沿着杆的方向作用。青色箭头表示 P 的加速度。

来自 P 的力沿着杆的方向。只有两个力作用在杆上：来自铰链、作用于 H 的力，以及来自 P、作用于 P 的力 $\mathbf{G}$。杆是轻的，所以无论它如何运动，它所受关于铰链轴的总力矩都是零（质量乘以角加速度等于零）。铰链力对 H 没有力矩，所以 $\mathbf{G}$ 对 H 也没有力矩。

其次，P 以转轴为圆心作水平圆周运动，所以它的加速度是水平的，并指向转轴，而转轴位于杆所在的铅垂平面上。P 的重量也在该平面上，所以杆对 P 施加的力，以及因此 $\mathbf{G}$（根据牛顿第三定律（Newton's third law），两者大小相等、方向相反），也位于该平面上。该平面上一个对 H 力矩为零的力，其作用线必通过 H。这条作用线也通过位于杆上的 P，所以 $\mathbf{G}$ 与杆平行，得证。

角度。因此，杆沿着杆的方向以力 T 推或拉 P；我们取 T 的方向为由 H 指向 P，即分量为 $(T\sin\alpha,\ T\cos\alpha)$。$P$ 与转轴的距离为 $r - d\sin\alpha$，由于 $d\sin\alpha < r$，这个距离是正数，所以 P 与 H 位于转轴的同一侧，而它的加速度 $\omega^2(r - d\sin\alpha)$ 指向 $+x$ 方向。对 P 应用牛顿第二定律（Newton's second law）：

$$\begin{aligned} &\text{铅垂方向：} && T\cos\alpha - mg = 0, \\ &\text{水平方向：} && T\sin\alpha = m\omega^2(r - d\sin\alpha). \end{aligned}$$

将第二式除以第一式（我们有 $\cos\alpha \neq 0$，否则 $T\cos\alpha = 0 \neq mg$）：

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2(r - d\sin\alpha)}{g} = \frac{r - d\sin\alpha}{a}.$$

两边乘以 $a\cot\alpha$，得 $a = r\cot\alpha - d\cos\alpha$，即

$$r\cot\alpha = a + d\cos\alpha,$$

得证。

铰链力。第一式给出 $T = mg/\cos\alpha > 0$，所以杆把 P 推离铰链：杆处于受压（compression）状态。根据牛顿第三定律，P 沿着杆的方向以力 T 把杆推向 H。杆是轻的，所以它所受的力总和为零，而铰链对杆的力与此大小相等、方向相反：它**沿着杆的方向，由铰链指向** P（向上，并向内指向转轴），大小为

$$\frac{mg}{\cos\alpha} = mg\sec\alpha.$$

第 (ii) 部分

现在质量为 m_i $(i = 1, 2)$ 的质点位于 $(d_i\sin\beta,\ d_i\cos\beta)$，与转轴的距离为 $r - d_i\sin\beta > 0$。

> **想一想** 现在每个质点都以某个未知的方向拉杆。我们怎样才能避免逐一求出这些力？

我们不需要逐一求出它们：对每个质点应用牛顿第二定律，可得杆对它施加的力，然后对轻杆关于 H 列出力矩方程，便能消去未知的铰链力。设 $\mathbf{F}_i$ 为杆对质点 i 施加的力。质点 i 的加速度为 $+x$ 方向的 $\omega^2(r - d_i\sin\beta)$，所以

$$\mathbf{F}_i + (0, -m_ig) = (m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta),\ 0) \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{F}_i = (m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta),\ m_ig).$$

根据牛顿第三定律，质点 i 在点 $(x_i, y_i) = (d_i\sin\beta,\ d_i\cos\beta)$ 对杆施加 $-\mathbf{F}_i$。作用于 (x, y) 的力 (X, Y) 关于 H 的逆时针力矩为 $xY - yX$，所以 $-\mathbf{F}_i$ 的力矩为

$$-d_i\sin\beta\cdot m_ig + d_i\cos\beta\cdot m_i\omega^2(r - d_i\sin\beta).$$

铰链力对 H 没有力矩，而杆是轻的，所以这两个力矩之和为零。除以 $\omega^2\sin\beta$（它不等于零：若 $\beta = 0$，力矩方程会变成 $\sum m_id_i\omega^2 r = 0$，这是错的），并利用 $g/\omega^2 = a$：

$$\sum_{i=1}^{2} m_id_i(-a + r\cot\beta - d_i\cos\beta) = 0,$$

即

$$(m_1d_1 + m_2d_2)\,r\cot\beta = (m_1d_1 + m_2d_2)\,a + (m_1d_1^2 + m_2d_2^2)\cos\beta.$$

除以 $m_1d_1 + m_2d_2 > 0$，

$$r\cot\beta = a + b\cos\beta, \qquad b = \frac{m_1d_1^2 + m_2d_2^2}{m_1d_1 + m_2d_2}.$$

验算

- 只有一个质点时（例如 $m_2 = 0$），得 $b = d_1$，与第 (i) 部分一致。若 $d_1 = d_2 = d$，则同样有 $b = d$：位于同一点的两个质点，作用就如一个质点。

- b 是 d_1 与 d_2 的加权平均（权为 $m_i d_i$），所以它介乎两者之间，理应如此。
- 当 $\omega \to 0$ 时，$a \to \infty$，所以 $\cot\alpha \to \infty$，杆趋向铅垂，这正是圆盘几乎不转动时我们所预期的。当 $\omega \to \infty$ 且 $d > r$ 时，$a \to 0$，方程趋向 $r = d\sin\alpha$：质点趋近转轴，在那里它几乎不需要向心力。
- 取 $r = 1\,\mathrm{m}$、$\omega = 5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$、$d = 0.6\,\mathrm{m}$ 及 $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，得 $a = 0.3924\,\mathrm{m}$，而方程给出 $\alpha \approx 0.9251$（约 $53.0°$）；于是 $r\cot\alpha \approx 0.7538 \approx a + d\cos\alpha$。以电脑模拟杆的运动，令它在这个角度由静止开始，它会一直停留在该处。

常见错误

- 在第 (ii) 部分假设每个质点对杆的力都沿着杆的方向。这只是单一质点时的特殊情况；有两个质点时，只有关于 H 的总力矩为零。
- 把质点圆周的半径误用为 r（或 $d\sin\alpha$），而不是 $r - d\sin\alpha$。
- 把铰链力说成指向铰链：杆处于受压状态，所以铰链把杆推向 P。

STEP 之外

第 (ii) 部分的力矩方程，正是有效势能（effective potential）$\sum m_i\left(g d_i\cos\theta - \frac{1}{2}\omega^2(r - d_i\sin\theta)^2\right)$ 取驻值的条件：在旋转参考系中，离心力的表现就像一个额外的势能。这是分析离心调速器（centrifugal governor）等旋转系统，以及探讨稳态是否稳定（stable）的起点。在这里，有效势能在 $\theta = \alpha$ 处取极大值，所以第 (i) 部分的稳态其实是不稳定的：只要轻轻推一下杆，它便会摆离该位置。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）涵盖了刚体力矩和旋转参考系。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。