详细解答

STEP III 2015，第 10 题

力学 • 转动的刚杆

STEP III 2015，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

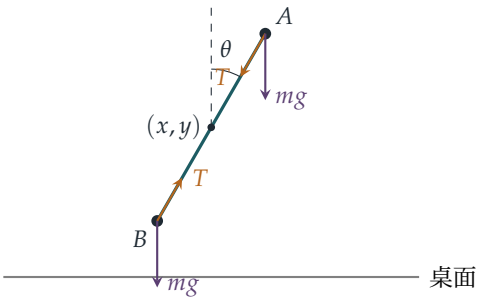
step.maths.org/questions/15-s3-q10

关键思路

用中点的运动和杆的转动来描述整个系统。以 x、y 和 θ 写出每个质点（particle）的位置，对时间求导两次，再对每个质点应用牛顿第二定律（Newton's second law）。把两条方程相加便消去张力（tension），得出质心（centre of mass）的运动。把两条方程相减，再沿垂直于杆的方向分解，又一次消去张力，剩下的就是转动。三个加速度都求出后，最后一部分就是抛射体运动（projectile motion）加上匀速转动。

解答

我们把两个质量模型化为由一根轻质刚性杆连接的质点。每个质点只受两个力：本身的重量，以及沿杆方向作用的杆的力。设 T 为张力，$T > 0$ 表示杆把每个质点拉向中点。（杆也可以推，此时 $T < 0$；以下的推导与 T 的正负无关。）



质点 A 的运动方程

设 A 为杆上起初位于中点上方那一端的质点，因此由中点指向 A 的向量（vector）是 $a(\sin\theta, \cos\theta)$。于是 A 的位置是

$$\mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} x + a\sin\theta \\ y + a\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \text{所以} \qquad \dot{\mathbf{r}}_A = \begin{pmatrix} \dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} - a\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}$$

这是由链式法则（chain rule）得出的，也就是题目要求的速度。再求导一次，对 $\dot{\theta}\cos\theta$ 和 $\dot{\theta}\sin\theta$ 使用积法则（product rule），得

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = \begin{pmatrix} \ddot{x} + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} - a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix}.$$

杆以大小为 T 的力，沿 $-(\sin\theta, \cos\theta)$ 方向把 A 拉向中点。重力贡献 $-mg(0,1)$。因此对 A 应用牛顿第二定律，正好得出题目所给的方程：

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} - a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix} = -T\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{A}$$

另一个质点

对于位于另一端的 B，把所有 a 换成 $-a$ 即可。此时杆沿 $+(\sin\theta, \cos\theta)$ 方向拉 B：

$$m\begin{pmatrix} \ddot{x} - a\ddot{\theta}\cos\theta + a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y} + a\ddot{\theta}\sin\theta + a\dot{\theta}^2\cos\theta \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{B}$$

这里 B 的速度是 $(\dot{x} - a\dot{\theta}\cos\theta,\ \dot{y} + a\dot{\theta}\sin\theta)$。

推导加速度

把 (A) 和 (B) 相加，所有含 a 或 T 的项都会抵消：

$$2m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -2mg\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{所以} \qquad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g.$$

以 (A) 减去 (B)，再除以 2：

$$ma\ddot{\theta}\cos\theta - ma\dot{\theta}^2\sin\theta = -T\sin\theta,$$
$$-ma\ddot{\theta}\sin\theta - ma\dot{\theta}^2\cos\theta = -T\cos\theta.$$

想一想 我们不知道 T，该怎样把它消去？

张力沿杆的方向作用，所以我们沿垂直于杆的方向 $(\cos\theta, -\sin\theta)$ 分解，即取第一条方程乘以 $\cos\theta$，减去第二条方程乘以 $\sin\theta$。右边得出 $-T\sin\theta\cos\theta + T\cos\theta\sin\theta = 0$，而 $\dot\theta^2$ 项亦以同样方式抵消。剩下的是

$$ma\ddot\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0,$$

由于 $m, a \neq 0$，得 $\ddot\theta = 0$。（若改为沿杆的方向分解，则得 $T = ma\dot\theta^2$，即绕中点作圆周运动所需的张力。）

最后一部分

在 $t = 0$ 时杆是铅直的，所以 $\theta = 0$。此时质点 A 在较高位置，速度为 $(\dot x + a\dot\theta,\ \dot y)$；$B$ 在较低位置，速度为 $(\dot x - a\dot\theta,\ \dot y)$。与题目所给的初速度比较：

$$\dot x + a\dot\theta = u, \qquad \dot x - a\dot\theta = 0, \qquad \dot y = v,$$

所以起初 $\dot x = \frac{1}{2}u$、$\dot\theta = \dfrac{u}{2a}$ 及 $\dot y = v$。

由上一部分，$\dot\theta$ 保持不变，所以 $\theta = \dfrac{ut}{2a}$。我们取 $u > 0$，使 θ 递增。此外 $\ddot y = -g$ 且 $y(0) = h$，所以

$$y = h + vt - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

当 $\dfrac{ut}{2a} = \dfrac{\pi}{2}$，即 $t = \dfrac{\pi a}{u}$ 时，杆转过了 $\frac{1}{2}\pi$。此时杆是水平的，所以两个质点都位于中点的高度 y。两者在那一刻同时碰到桌面，当且仅当那时 $y = 0$：

$$h + v\cdot\frac{\pi a}{u} - \frac{1}{2}g\cdot\frac{\pi^2a^2}{u^2} = 0.$$

乘以 $2u^2$ 并整理，得

$$2hu^2 = \pi^2a^2g - 2\pi uva,$$

此即所求。

验算

- 当 $v = 0$ 时，下落时间为 $\sqrt{2h/g}$，这必须等于 $\pi a/u$。两边平方得 $2hu^2 = \pi^2a^2g$，与结果吻合。
- 单位：结果中每一项的量纲（dimensions）都是 $\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}$。
- 我们用电脑模拟了两个由刚性杆连接的质点，随机选取多组 a、u、v，取 $g = 9.8$，并由公式给出 h。例如 $a \approx 1.754$ 时 $h \approx 17.93$。在每一种情况下，两个质点都在 $t = \pi a/u$ 时同时到达桌面，误差在 10^{-10} 以内，而且杆是水平的。

常见错误

- 把其中一个质点所受张力的方向弄错。杆把每个质点拉向中点，所以两个力大小相等、方向相反。
- 在两条方程中使用不同的 T。杆是轻质的，所以它所受的合力必须为零，两端的张力相同。
- 对 $\dot{\theta}\cos\theta$ 求导时漏掉 $-a\dot{\theta}^2$ 项。缺少这些项，相减那一步就不能干净地得出结果。

STEP 之外

这道题是关于质点系的一条一般定理的小小例子。质心的运动，就如同全部质量和全部外力都集中在质心一样。内力两两抵消，所以若对质心没有外力矩（torque），则绕质心的角动量（angular momentum）守恒。在大学一年级的力学课程中，你还会学到拉格朗日方法（Lagrangian approach），它把 x、y、θ 当作广义坐标（generalised coordinates），完全不需要用到 T。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对质心和刚体转动有详尽的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。