详细解答

STEP III 2015，第 1 题

纯数学 · 归约公式与代换

STEP III 2015，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s3-q1

关键思路

在第 (i) 部分，$I_n - I_{n+1}$ 可以合并成一个分子为 u^2 的积分。把 u^2 写成 $u \cdot u$，再用分部积分 (integration by parts)，就能回到 I_n。在第 (ii) 部分，把 x 换成 $1/x$ 时，式子 $(x - x^{-1})^2$ 保持不变，而这个代换 (substitution) 会产生因子 x^{-2}。把两种形式取平均，得到 $1 + x^{-2}$，这正好是 $x - x^{-1}$ 的导数 (derivative)，于是代换 $u = x - x^{-1}$ 便行得通。至于第 (iii) 部分，只要把分母写成以 $x - x^{-1}$ 表示的形式，它其实就是乔装了的第 (ii) 部分。

解答

第 (i) 部分

把两个被积函数（integrand）通分，

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^\infty \frac{(1+u^2)-1}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty u \cdot \frac{u}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u.$$

第二个因子的原函数（antiderivative）很容易求得：

$$\int \frac{u}{(1+u^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2n(1+u^2)^n}.$$

因此我们进行分部积分，对 u 求导，并对 $u/(1+u^2)^{n+1}$ 积分：

$$I_n - I_{n+1} = \left[-\frac{u}{2n(1+u^2)^n}\right]_0^\infty + \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u.$$

边界项（boundary term）在 $u = 0$ 时为 0。当 $u \to \infty$ 时它亦趋向 0，因为由 $n \geq 1$ 可得 $0 \leq u/(1+u^2)^n \leq u/(1+u^2) < 1/u$。因此

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n} I_n,$$

正如所求。移项整理后，

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n \qquad (n \geq 1).$$

至于起始值，$I_1 = [\arctan u]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$。反复应用这个递推关系（recurrence），

$$I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

想一想 怎样把奇数的乘积化成阶乘（factorials）？

把分子和分母同乘以偶数的乘积 $2 \cdot 4 \cdots (2n) = 2^n n!$。这样分子变成 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n) = (2n)!$，分母则变成 $(2^n n!)^2$。所以

$$I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}(n!)^2},$$

正如所求。（若要严格证明，可用归纳法（induction）：公式在 $n = 0$ 时成立，此时它给出 $I_1 = \frac{\pi}{2}$。若公式对 I_n 成立，则乘以 $\frac{2n-1}{2n} = \frac{(2n-1)(2n)}{(2n)^2}$ 会把 $\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}$ 变成 $\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$。）

第 (ii) 部分

第一个等式。在 J 中代入 $x = 1/t$，于是 $\mathrm{d}x = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$，而 x 由 0 变到 ∞ 对应于 t 由 ∞ 变到 0。此外

$$\left(x - x^{-1}\right)^2 = \left(t^{-1} - t\right)^2 = \left(t - t^{-1}\right)^2,$$

因为平方消除了正负号的改变。因此

$$J = \int_\infty^0 \mathrm{f}((t - t^{-1})^2)\left(-t^{-2}\right)\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{-2}\,\mathrm{f}((t - t^{-1})^2)\,\mathrm{d}t,$$

再把哑变量（dummy variable）t 改名为 x，便得到第一种形式。

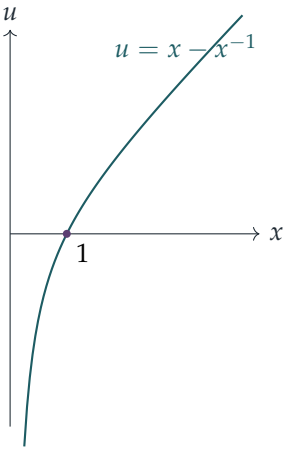
第二个等式。把 J 原来的表达式与这个表达式相加，再除以二，

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(1 + x^{-2}\right)\mathrm{f}((x - x^{-1})^2)\,\mathrm{d}x.$$

第三个等式。现在设 $u = x - x^{-1}$，于是 $\mathrm{d}u = (1 + x^{-2})\,\mathrm{d}x$。由于 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x > 0$，$u$ 随 x 严格递增，由 $-\infty$（当 $x \to 0^+$）增至 $+\infty$（当 $x \to \infty$）。所以这个代换在整个范围上是一一对应的变量变换：

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{f}(u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty \mathrm{f}(u^2)\,\mathrm{d}u.$$

最后一步成立，是因为 $\mathrm{f}(u^2)$ 是 u 的偶函数（even function），所以在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, \infty)$ 上的积分相等。第 (ii) 部分至此完成。



这条曲线经过 $(1,0)$，并在 $x>0$ 上持续上升，恰好一次取遍 u 的每一个实数值。

第 (iii) 部分

目标是把被积函数改写成 $x^{-2}\,\mathrm{f}((x-x^{-1})^2)$ 的形式。由于 $(x-x^{-1})^2 = x^2 - 2 + x^{-2}$，

$$x^4 - x^2 + 1 = x^2\left(x^2 - 1 + x^{-2}\right) = x^2\left(1 + (x-x^{-1})^2\right).$$

因此

$$\frac{x^{2n-2}}{(x^4-x^2+1)^n} = \frac{x^{2n-2}}{x^{2n}(1+(x-x^{-1})^2)^n} = x^{-2}\,\mathrm{f}((x-x^{-1})^2), \qquad \text{其中} \mathrm{f}(y) = \frac{1}{(1+y)^n}.$$

根据第 (ii) 部分中 J 的第一种和最后一种形式，

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-2}}{(x^4-x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{(1+u^2)^n}\,\mathrm{d}u = I_n.$$

在第 (i) 部分的公式中以 $n-1$ 代替 n（当 $n-1\geq 0$ 时成立，即对每个正整数 n 皆成立），得到

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-2}}{(x^4-x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{(2n-2)!\,\pi}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}.$$

验算

- 当 $n=1$ 时答案是 $\frac{\pi}{2}$，所以 $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1} = \frac{\pi}{2} \approx 1.5708$。当 $n=2$ 时答案是 $\frac{\pi}{4}$，当 $n=3$ 时答案是 $\frac{3\pi}{16} \approx 0.5890$。对原积分进行数值积分，结果与以上各值吻合，直至 $n=8$ 的情况亦然。
- 递推关系给出 $I_2 = \frac{1}{2}I_1 = \frac{\pi}{4}$，与用 $u = \tan\theta$ 直接计算的结果一致：$I_2 = \int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$。

- 取 $f(y) = e^{-y}$，第 (ii) 部分表明 $\int_0^\infty e^{-(x-1/x)^2}\,dx = \int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.88623$。对全部四种形式进行数值计算，都得到这个值。

常见错误

- 忘记检查边界项 $u/(1+u^2)^n$ 在无穷远处是否趋于零。这里它确实趋于零，但这只是因为 $n \geq 1$。
- 代入 $u = x - x^{-1}$ 后仍保留上下限 0 和 ∞。新的下限是 $-\infty$，正是 $f(u^2)$ 的偶性把范围带回 $(0, \infty)$。
- 使用 I_{n+1} 的公式时没有移动下标：第 (iii) 部分的答案是 I_n，而不是 I_{n+1}。

STEP 之外

比值 $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \binom{2n}{n}/4^n$ 是一个中心二项概率（central binomial probability），而第 (i) 部分的递推关系，正是推导出 π 的沃利斯（Wallis）乘积的同一个递推关系。第 (ii) 部分的技巧称为柯西（Cauchy）— Schlömilch 变换（Cauchy–Schlömilch transformation）。它可以计算许多没有初等原函数的定积分，包括像验算中那个的高斯（Gauss）型积分。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶难题》）收录了更多可用巧妙代换解决的积分；Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）则严格地处理反常积分（improper integrals）和变量变换。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。