详细解答

STEP II 2015，第 9 题

力学 • 刚体转动

STEP II 2015，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s2-q9

关键思路

这个系统的一切都由一个点控制：两个质点的质心（centre of mass）G。一个以 A 为枢轴的刚体（rigid body）静止悬挂时，G 位于 A 的正下方；而当且仅当它有足够能量把 G 送过最高点时，它才会作完整的旋转。因此，只要找出 G 的位置及其与 A 的距离，两部分便迎刃而解。

解答

我们把 B 和 C 视为以轻质刚性杆连接的质点，并设 A 处的转轴光滑，因此唯一做功的力是重力。

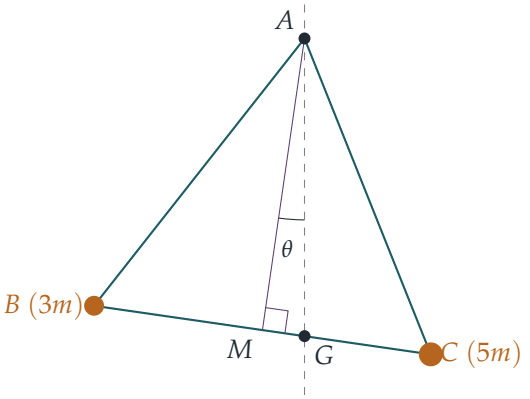
第 (i) 部分

由于杆是轻的，系统的质心就是位于 B 的 $3m$ 与位于 C 的 $5m$ 的质心。该点 G 位于 BC 上，且

$$BG = \frac{5}{8}a, \qquad CG = \frac{3}{8}a.$$

设 M 为 BC 的中点。于是 $MG = \frac{5}{8}a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{8}a$，位于靠近 C 的一侧。由于三角形是等边三角形，$AM \perp BC$ 且 $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，因此在三角形 AMG 中应用毕氏定理（Pythagoras），

$$AG^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{64} = \frac{49a^2}{64}, \qquad AG = \frac{7a}{8}.$$



在平衡状态下，作用于 G 的重量 $8mg$ 对 A 的力矩（moment）必须为零，所以 G 位于 A 的正下方：直线 AG 是铅垂的。而 BC 垂直于 AM，水平方向则垂直于铅垂线 AG。把一对直线同时旋转一个直角，并不会改变它们之间的夹角，因此

$$\theta = \angle GAM.$$

在直角三角形 AMG（直角在 M）中，

$$\sin\theta = \frac{MG}{AG} = \frac{a/8}{7a/8} = \frac{1}{7},$$

得证。注意较重的质点 C 是 BC 较低的一端，这正合理。

第 (ii) 部分

两个质点与转轴的距离都是 a，所以它们的速率永远相同。若三角形以角速率（angular speed）ω 转动，每个质点的速率都是 $a\omega$。冲量（impulse）作用后的一瞬间，B 的速率为 v，C 亦然，因此动能为

$$\tfrac{1}{2}(3m)v^2 + \tfrac{1}{2}(5m)v^2 = 4mv^2.$$

（等价地说，对 A 的转动惯量（moment of inertia）是 $8ma^2$，而 $\omega = v/a$。）冲量的方向并不重要，因为下面的能量方程只涉及速率。

> ? **想一想** 我们是否需要 v 足够大，使某些东西在最高点保持拉紧，就像系在绳上的质点那样?

不需要。杆是刚性的，既能拉也能推，所以唯一的要求是在系统转完一整圈之前，角速率永不降至零。这纯粹是一个能量条件。

系统的势能是 $8mg$ 乘以 G 的高度。由于 G 在以 A 为圆心、半径为 $AG = \frac{7}{8}a$ 的圆上运动，当 G 位于 A 的正上方时势能最大，此时它比起始位置高出

$$2 \cdot \frac{7a}{8} = \frac{7a}{4}$$

。根据能量守恒（conservation of energy），在 G 升高了 h 的位置，

$$4m(a\omega)^2 = 4mv^2 - 8mgh.$$

当 $h = \frac{7}{4}a$ 时，右方最小。若右方在该处为正，则全程 $\omega \neq 0$，所以 ω 永不变号，系统一直朝同一方向转动，一圈接一圈地旋转。若右方为负，则 ω 必定在 G 到达最高点之前降至零，系统便会摆回去。因此条件是

$$4mv^2 > 8mg \cdot \frac{7a}{4} \iff v^2 > \frac{7ag}{2}.$$

故此

$$v_0 = \sqrt{\frac{7ag}{2}}.$$

（当 $v = v_0$ 恰好成立时，G 会缓缓趋向 A 正上方的位置，却要花无限长的时间才能到达，这就是条件为严格不等式（strict inequality）的原因。）

验算

- 若两个质量相等，G 便会在 M，得出 $\theta = 0$ 及 $AG = \frac{\sqrt{3}}{2}a$：把 $MG = 0$ 代入公式正好得出这结果。
- 以数值方法在所有方位中求势能的最小值，得出 $\sin\theta = 0.142857\ldots = \frac{1}{7}$。
- 单位：ag 的单位是 $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$，所以 v_0 是速率。当 $a = 1\,\mathrm{m}$ 及 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 时，$v_0 \approx 5.86\,\mathrm{m\,s^{-1}}$。
- 以电脑逐步模拟运动，证实当 $v = 1.01v_0$ 时系统会越过最高点，而当 $v = 0.99v_0$ 时则会摆回去。

常见错误

- 把 G 的升幅当作 $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$（用了 AM 而不是 AG），结果得出 $v_0^2 = 2\sqrt{3}\,ag$。
- 把 B 和 C 分开处理，忘记冲量同样令 C 的速率为 v。
- 在最高点加上“绳子保持拉紧”的条件：杆可以承受推力（thrust），所以根本不需要这条件。

STEP 之外

这里的能量论证是复摆（compound pendulum）的刚体版本：一个在距离质心 d 处以枢轴支撑的物体，其行为就像单摆（simple pendulum），运动方程为 $I\ddot{\psi} = -Mgd\sin\psi$。

在大学一年级的课程中，你会学到这个方程的相平面（phase plane），其中临界速率 v_0 对应于分隔摆动与完整旋转的分界线（separatrix）。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）详细讨论了刚体绕固定轴的转动以及物理摆（physical pendulum）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。