详细解答

STEP II 2015，第 8 题

纯数学 · 向量与相切圆

STEP II 2015，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s2-q8

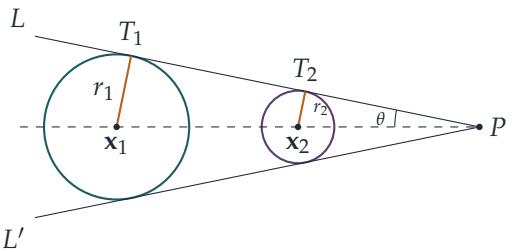
关键思路

每个圆心与两条切线（tangent）的距离相同（即其自身的半径），所以两个圆心都位于平分 L 与 L' 之间夹角的直线上，即角平分线（angle bisector）上。沿着这条直线，与 P 的距离和半径成正比，由此立即得出 (i) 的公式。至于 (ii)，把公式除以 $r_1 r_2$ 后会变得对称得多：以 $\mathbf{x}_i/r_i$ 和 $1/r_i$ 表示时，三个焦点（focus）满足一条系数之和为零的线性关系，而这正正就是共线（collinear）的意思。

解答

第 (i) 部分

设 θ 为 L 与 L' 在 P 处夹角的一半，取的是包含两个圆的那个角。



圆的切线与圆心的垂直距离等于半径。所以 $\mathbf{x}_1$ 与 L 和 L' 的距离都是 r_1，而与两条相交直线等距的点，必位于 P 处两条角平分线的其中一条上。由于两个圆位于 L 的同一侧，亦位于 L' 的同一侧，两个圆心都在 L 与 L' 分割出的四个角区域中的同一个区域内，所以它们位于从 P 出发的同一条半直线上：即该区域的角平分线。设 $\mathbf{u}$ 为沿这条半直线、由

P 指向两个圆的单位向量（unit vector）。

设 T_1 为 L 与 C_1 相切的点，则三角形 PT_1X_1（其中 X_1 为圆心）在 T_1 处为直角，所以 $r_1 = PX_1 \sin\theta$。同理 $r_2 = PX_2 \sin\theta$。因此

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{p} = \frac{r_1}{\sin\theta}\,\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}_2 - \mathbf{p} = \frac{r_2}{\sin\theta}\,\mathbf{u},$$

其中 $\mathbf{p}$ 为 P 的位置向量（position vector）。消去 $\mathbf{u}/\sin\theta$，得

$$r_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{p}) = r_1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}) \quad \Longrightarrow \quad (r_1 - r_2)\,\mathbf{p} = r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1.$$

两个圆大小不同，所以 $r_1 \neq r_2$，可以相除：

$$\mathbf{p} = \frac{r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1}{r_1 - r_2},$$

即为所求。（若半径相等，L 与 L' 便会平行，根本没有焦点。）

第 (ii) 部分

> **想一想** $\mathbf{p}$ 的公式并不具有明显的对称性。能否把它改写，使三个焦点的形式看起来一样?

把 $(r_1 - r_2)\mathbf{p} = r_1\mathbf{x}_2 - r_2\mathbf{x}_1$ 除以 r_1r_2。记 $s_i = 1/r_i$ 及 $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i/r_i$，式子变成

$$(s_2 - s_1)\,\mathbf{p} = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1.$$

把第 (i) 部分应用于另外两对圆（这是容许的，因为 $r_3 \neq r_1$、$r_3 \neq r_2$，而且各圆互不重叠），并以 $\mathbf{q}$ 和 $\mathbf{r}$ 表示 Q 和 R 的位置向量，得

$$(s_3 - s_1)\,\mathbf{q} = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1, \qquad (s_3 - s_2)\,\mathbf{r} = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2.$$

右方满足 $(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + (\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_2) = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1$，所以

$$(s_2 - s_1)\,\mathbf{p} + (s_3 - s_2)\,\mathbf{r} = (s_3 - s_1)\,\mathbf{q}.$$

由于 $s_3 \neq s_1$，可写成

$$\mathbf{q} = \lambda\,\mathbf{p} + (1 - \lambda)\,\mathbf{r}, \qquad \text{其中} \lambda = \frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1},$$

因为两个系数 $\frac{s_2-s_1}{s_3-s_1}$ 与 $\frac{s_3-s_2}{s_3-s_1}$ 之和为 1。所以 $\mathbf{q} = \mathbf{r} + \lambda(\mathbf{p} - \mathbf{r})$，这是经过 R 和 P 的直线上的一点。因此 P、Q 和 R 共线。（若 P 与 R 刚好重合，则同样得出 $Q = P = R$，命题显然成立。）

第 (iii) 部分

由第 (ii) 部分，$\mathbf{q} = \lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{r}$。假设 $P \neq R$，则点 $\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{r}$ 是中点 $\frac{1}{2}(\mathbf{p}+\mathbf{r})$ 若且唯若 $\lambda = \frac{1}{2}$（不同的 λ 值对应直线上不同的点）。所以条件为

$$\frac{s_2 - s_1}{s_3 - s_1} = \frac{1}{2} \iff 2s_2 = s_1 + s_3 \iff \frac{2}{r_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \iff r_2 = \frac{2r_1 r_3}{r_1 + r_3}.$$

换言之，r_2 必须是 r_1 与 r_3 的调和平均数（harmonic mean）。（在退化情况 $P = R$ 下，三个焦点重合，无论半径为何，Q 都显然位于中点。）

验算

- 第 (i) 部分：令 $r_2 \to 0$，C_2 缩成一点，公式给出 $\mathbf{p} = \mathbf{x}_2$：从一点引出的切线当然经过该点。另外，$\mathbf{p}$ 等于 $\mathbf{x}_2 + \frac{r_2}{r_1 - r_2}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$，当 $r_2 < r_1$ 时位于较小的圆之外，与图中一致。
- (iii) 的一个数值例子：取圆心 $(0,0)$、$(10,1)$、$(3,8)$，半径分别为 1、$\frac{3}{2}$、3，使得 $\frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$。于是 $P = (-20,-2)$、$R = (17,-6)$、$Q = (-\frac{3}{2},-4)$，而 Q 确实是 PR 的中点。
- 公式亦经电脑验证：对许多随机产生的圆对，直接求两条切线的交点，都得出相同的点 P。

常见错误

- 没有解释为何 P 位于连心线上，或为何 P 位于连接两圆心的线段之外（承载两个圆心的，是从 P 出发的同一条半直线）。
- 只显示 $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ 与 $\mathbf{r} - \mathbf{p}$ 平行，却没有检查关系式的系数之和为零；关系式 $\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} + \gamma\mathbf{r} = \mathbf{0}$ 只有在 $\alpha + \beta + \gamma = 0$ 时才蕴含共线。

STEP 之外

焦点 P 是把 C_1 映射到 C_2、比例因子为正数 r_2/r_1 的放大（enlargement，又称位似 homothety）的中心。第 (ii) 部分就是蒙日（Monge）的三圆定理：把以 Q 和 R 为中心的两个放大复合起来，便得到以 P 为中心的放大，而两个放大的复合的中心，位于经过这两个中心的直线上。(ii) 中的代数运算是重心坐标（barycentric coordinates，又称仿射坐标 affine coordinates）的初步体验；在这种坐标中，共线就是一条系数之和为零的线性关系。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）发展了背后的线性映

射理论，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶难题》）则收录了更多同类题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。