详细解答

STEP II 2015，第 7 题

纯数学 · 相交圆

STEP II 2015，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s2-q7

关键思路

当两个圆相交于两点时，通过这两点的直线（即公共弦（common chord））垂直于连心线（line of centres）。圆 D 平分（bisects）C，当且仅当这条公共弦是 C 的直径（diameter），即公共弦通过 C 的圆心。由两个圆心及其中一个交点组成一个直角三角形，对它应用毕氏定理（Pythagoras′ theorem），便可把“平分”化为一条方程：（圆心之间的距离）$^2 = r^2 - a^2$。

解答

第 (i) 部分

设 D 的圆心为 Q、半径为 r，并设 O 为原点。

*一般条件。*假设 D 平分 C，与 C 相交于 P 及 $P' = -P$，其中 $|P| = a$。两点都在 D 上，所以 $QP = QP' = r$。于是 Q 与 P、P' 等距，因此 Q 位于 PP' 的垂直平分线（perpendicular bisector）上，而这条垂直平分线通过 O（即 PP' 的中点）。因此 $OQ \perp OP$，对三角形 OQP 应用毕氏定理，得

$$r^2 = OQ^2 + a^2. \qquad (*)$$

反过来，若 D 是任何满足 $OQ^2 = r^2 - a^2$ 及 $OQ > 0$ 的圆，在 C 上取一点 P 使 $OP \perp OQ$。那么 $QP^2 = OQ^2 + a^2 = r^2$，对 $-P$ 亦同理，所以 D 通过 C 上两个径向相对（diametrically opposite）的点。两个不同的圆最多相交于两点，所以这两点就是仅有的交点，因此 D 平分 C。

*当 $r > a$ 时的存在性。*把圆心放在 x 轴上，与 O 相距 $\sqrt{r^2 - a^2} > 0$：

$$(x - \sqrt{r^2 - a^2})^2 + y^2 = r^2.$$

直接验证：从这条方程减去 $x^2+y^2=a^2$，得 $-2x\sqrt{r^2-a^2}+(r^2-a^2)=r^2-a^2$，所以 $x=0$（因为 $r\neq a$），于是 $y=\pm a$。两圆恰好相交于 $(0,a)$ 及 $(0,-a)$，而这两点在 C 上径向相对。所以这个半径为 r 的圆平分 C。

*当 $r\leq a$ 时的不可能性。*若某个半径为 r 的圆平分 C，则由 $(*)$ 得 $r^2=OQ^2+a^2\geq a^2$。所以 $r<a$ 是不可能的。若 $r=a$，则 $(*)$ 迫使 $OQ=0$，所以 D 就是 C 本身，它与 C 相交于无限多点，而不是恰好两点。因此没有半径 $r\leq a$ 的圆能平分 C。

第 (ii) 部分

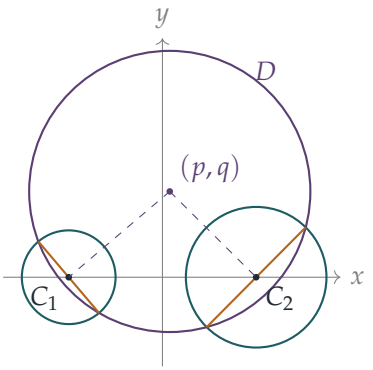
设 D 的圆心为 (p,q)。对每个圆应用 $(*)$（把原点平移至相应的圆心），

$$(p+d)^2+q^2=r^2-a_1^2,$$
$$(p-d)^2+q^2=r^2-a_2^2.$$

以第一式减去第二式，q^2 和 p^2 项互相抵消，剩下 $4pd=a_2^2-a_1^2$，所以

$$p=\frac{a_2^2-a_1^2}{4d},$$

即为所求。



在草图中（$d=2$，$a_1=1$，$a_2=1.5$，$r=3$），每条公共弦（琥珀色）都是 C_1 或 C_2 的直径，并垂直于连接圆心的虚线。

为求 q，把 p 代回第一条方程。首先，

$$p+d=\frac{4d^2+a_2^2-a_1^2}{4d},$$

所以

$$q^2=r^2-a_1^2-\frac{(4d^2+a_2^2-a_1^2)^2}{16d^2}=\frac{16d^2r^2-16d^2a_1^2-(4d^2+a_2^2-a_1^2)^2}{16d^2}.$$

分子中被减去的项展开为

$$\begin{aligned}16d^2a_1^2+(4d^2+a_2^2-a_1^2)^2 &= 16d^4+8d^2(a_2^2-a_1^2)+16d^2a_1^2+(a_2^2-a_1^2)^2\\ &= 16d^4+8d^2(a_1^2+a_2^2)+(a_2^2-a_1^2)^2\\ &= (4d^2+(a_2-a_1)^2)(4d^2+(a_2+a_1)^2),\end{aligned}$$

最后一行成立，是因为 $(a_2-a_1)^2+(a_2+a_1)^2=2(a_1^2+a_2^2)$ 及 $(a_2-a_1)^2(a_2+a_1)^2=(a_2^2-a_1^2)^2$。因此

$$q=\pm\frac{\sqrt{16r^2d^2-(4d^2+(a_2-a_1)^2)(4d^2+(a_2+a_1)^2)}}{4d}.$$

想一想 不等式（inequality）从何而来？到目前为止，似乎没有任何东西像是不等式。

圆心 (p,q) 是实点，所以 $q^2\geq 0$。由于 $16d^2>0$，这表示

$$16r^2d^2\geq(4d^2+(a_2-a_1)^2)(4d^2+(a_2+a_1)^2),$$

这正是所要求关于 r 的条件。

我们还应检查第 (i) 部分的要求 $r>a_1$（及 $r>a_2$）并不是额外的条件。由于 $d>a_1$，我们有 $4d^2+a_2^2-a_1^2>0$，所以 $p+d>0$；于是 $r^2-a_1^2=(p+d)^2+q^2>0$。同理，因为 $d>a_2$，所以 $d-p>0$，因此 $r^2-a_2^2=(p-d)^2+q^2>0$。所以求得的圆 D 确实同时平分 C_1 和 C_2。

验算

- 对称情况 $a_1=a_2=a$：此时 $p=0$，正如关于 y 轴的对称性所要求的；条件变为 $16r^2d^2\geq 4d^2(4d^2+4a^2)$，即 $r^2\geq d^2+a^2$。这恰好是圆心在原点时的 $(*)$，而原点正是同时最接近 $(\pm d,0)$ 的可能圆心。
- 在草图的例子中，$p=0.15625$，$q\approx 1.830$，而 D 与 C_1 的交点约为 $(-1.353,-0.762)$ 及 $(-2.647,0.762)$，其中点为 $(-2,0)$，即 C_1 的圆心。在该例中 r 的最小可能值约为 2.377。
- 对调 C_1 和 C_2（$a_1\leftrightarrow a_2$，$d\to -d$），p 的形式不变，不等式亦不变，理应如此。

常见错误

- 在第 (i) 部分忘记 $r=a$ 的情况：$(*)$ 容许 $OQ=0$，你必须说明为何 $D=C$ 不算数。

- 把条件写成 $OQ^2 = r^2 + a^2$，这是把平分与直角相交（正交圆（orthogonal circles））混淆了。画出那个三角形：直角位于 C 的圆心，所以斜边（hypotenuse）是 D 的半径 r。
- 只给出 $q = +\sqrt{\cdots}$：关于 x 轴反射会得到第二个圆。

STEP 之外

对于点 (p, q) 及圆心为 (x_0, y_0)、半径为 r 的圆，量 $(p - x_0)^2 + (q - y_0)^2 - r^2$ 称为该点关于该圆的幂（power）；而关于两个圆具有相等幂的点的集合是一条直线，称为根轴（radical axis）；像我们那样把两条圆方程相减，便能求出它。在本题中，平分条件表示 C 的圆心关于 D 的幂等于 $-a^2$。这些概念，以及相关的圆反演（inversion），在 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）中有精彩的阐述；而许多 STEP 风格的应用可见于 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。